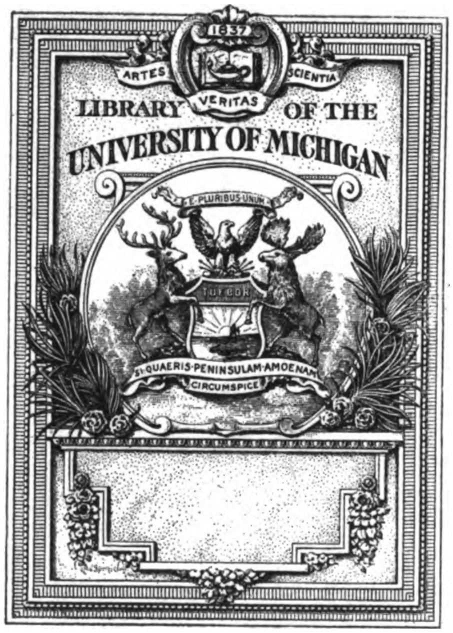

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, nº 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

TOME XIII. — ANNÉE 1848.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1848

TABLE DES MATIÈRES,

TOME XIII.

NOMS DES AUTEURS

qui ont inséré des Mémoires dans le

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES,

Publié par M. J. LIOUVILLE,

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes.

Messieurs

ABRIA.
AIMÉ.
AMIOT.
AMPÈRE.
AOUST (l'abbé).

BERTRAND (J.).
BESGE.
BINET (J.).
BLANCHET (P.-H.).
BONNET.
BORCHARDT (C.-W.).
BOUQUET (J.).
BRASSINNE (E.).
BRAVAIS.
BRETON (Ph.).
BRETON (de Champ).
BRIANCHON.
BRIOT (C.).

CABART.
CALIGNY (A. de).
CAQUÉ.
CATALAN (E.).
CAUCHY (A.).
CAYLEY (A.).
CELLÉRIER.
CHASLES.
COMBES.
CORIOLIS.
COSTE.
COURNOT.
DARU.
DELAUNAY.
DESBOVES (A.-H.).
DUHAMEL.
DU HAYS.
DUPRÉ (Ath.).
EISENSTEIN.
ELLIS (R.-L.).
FAVRE-ROLLIN.
FERRIOT.
FINCK.
GALOIS (Ev.).
GASCHEAU.
GAUSS.
GIULIO.
GRILLET.
GUÉRARD.
GUIBERT.
GUILLON (E.-L.).
HERMITE.
IVORY.
JACOBI (C.-G.-J.).
JELLETT (J.-H.).
JOACHIMSTHAL.
JOUBERT (C.).

KUMMER.

LAMARLE (E.).
LAMÉ.
LEBESGUE (V.-A.).
LEFORT (F.).
LÉGER.
LEJEUNE-DIRICHLET.
LE VERRIER (U.-J.).
LIBRI.
LIOUVILLE (J.).
LOBATTO (R.).

MAC-CULLAGH.
MARRE (A.).
MINDING.
MIQUEL (Auguste).
MOIGNO (l'abbé).
MOLINS.
MONDÉSIR.

NEUMANN.

OLIVIER (Th.).

PAGÈS.
PLUCKER.
POINSOT.
POISSON.
PUISEUX.

RAABE.
RICHELOT.
RISPAL (A.).
ROBERTS (M.).
ROBERTS (W.).
RODRIGUES (Ol.).
ROGER.

SAINT-VENANT.
SAINT-GUILHEM.
SARRUS.
SENARMONT (de).
SERRET (J.-A.).
STEICHEN.
STEINER.
STERN.
STOUVENEL.
STURM.
SVANBERG (A.-F.).

TCHEBICHEF.
TERQUEM.
THOMSON (W.).
TRANSON.

VIEILLE.
VINCENT.

WANTZEL.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

NOUVELLES PROPRIÉTÉS
DES LIGNES GÉODÉSIQUES ET DES LIGNES DE COURBURE
SUR L'ELLIPSOÏDE;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Dans le numéro de janvier 1846 de ce Journal, j'ai tiré quelques conséquences intéressantes de l'intégrale première de l'équation différentielle du second ordre qui appartient à une ligne géodésique sur un ellipsoïde à trois axes inégaux. Cette équation, donnée pour la première fois par M. Jacobi, a été mise par M. Liouville sous une forme très-élégante, qui exprime par elle-même toutes les propriétés auxquelles je fais allusion. L'article actuel aura pour objet de présenter l'intégrale seconde de l'équation d'une ligne géodésique qui passe par un ombilic de la surface d'une manière très-expressive, qui fera connaître beaucoup de propriétés curieuses, tant des lignes de courbure que des lignes géodésiques elles-mêmes.

Adoptons les notations employées par M. Liouville dans son article inséré au tome IX de ce Journal, page 401, sauf un léger changement qui consiste à substituer à la lettre ρ la lettre a, en sorte que le grand axe de l'ellipsoïde sera désigné ici par $2a$. Soient O, O′, O″, O‴ les ombilics de la surface. Pour fixer les idées, nous supposerons que O

et O′ sont deux foyers intérieurs des lignes de courbure représentées par l'équation $\mu =$ constante; O″ et O‴ seront les ombilics opposés à O et O′. On a généralement aux ombilics $\mu^2 = \nu^2 = b^2$; mais nous admettrons d'une manière plus précise que pour l'ombilic O on a $\mu = b$, $\nu = b$, tandis que $\mu = b$ et $\nu = -b$ pour l'ombilic O′. Maintenant soit OP une ligne géodésique passant par l'ombilic O, et dont P ou (μ, ν) est un point quelconque. On sait que pour une telle ligne la constante $\beta = b^2$. Les lignes géodésiques OP sont donc toutes représentées par l'équation

$$\int \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} + \int \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \alpha,$$

et ne diffèrent que par la valeur qu'on assigne à la quantité constante α. D'un autre côté, chaque ligne sera évidemment déterminée par l'angle $\mathrm{POO'} = \omega$ qu'elle forme avec la section principale qui contient les ombilics. Il résulte de là que la quantité α est une fonction de ω. Nous ferons donc $\alpha = \mathrm{F}(\omega)$, et en différentiant l'équation précédente dans l'hypothèse de μ, ν, ω variables simultanément, nous aurons

$$\frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} + \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = d\mathrm{F}(\omega). \tag{1}$$

Soient maintenant $\mu = b + \eta$, $\nu = b - \varepsilon$; en opérant ces substitutions dans l'équation (1), elle devient

$$\frac{d\eta}{2b\eta+\eta^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2-2b\eta-\eta^2}{c^2-b^2-2b\eta-\eta^2}} - \frac{d\varepsilon}{2b\varepsilon-\varepsilon^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2+2b\varepsilon-\varepsilon^2}{c^2-b^2+2b\varepsilon-\varepsilon^2}} = d\mathrm{F}(\omega),$$

ou

$$d\mathrm{F}(\omega) = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\left\{\begin{aligned} &\frac{d\eta}{\eta\left(1+\frac{\eta}{2b}\right)}\sqrt{\frac{1-\frac{2b}{a^2-b^2}\eta-\frac{\eta^2}{a^2-b^2}}{1-\frac{2b}{c^2-b^2}\eta-\frac{\eta^2}{c^2-b^2}}}\\ -&\frac{d\varepsilon}{\varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon}{2b}\right)}\sqrt{\frac{1+\frac{2b}{a^2-b^2}\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{a^2-b^2}}{1+\frac{2b}{c^2-b^2}\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{c^2-b^2}}}\end{aligned}\right\}.$$

Faisons marcher le point P sur la ligne géodésique OP déterminée par

l'angle ω, de manière à rapprocher indéfiniment ce point de l'ombilic O où l'on a $\mu = b$, $\nu = b$. En même temps que les quantités η, ε convergeront ainsi vers zéro, le second membre de cette équation tendra à devenir

$$\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\,d\log\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right).$$

D'un autre côté, si nous désignons par θ l'angle compris entre l'arc OP prolongé et un second arc géodésique O′P passant par l'autre ombilic O′, et si nous observons que cet angle est le double de l'angle désigné par i dans le Mémoire de M. Liouville, nous aurons

$$(b+\eta)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (b-\varepsilon)^2\sin^2\frac{\theta}{2} = b^2,$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2} = \frac{\eta(2b+\eta)}{\varepsilon(2b-\varepsilon)}.$$

Or l'angle ω est la limite vers laquelle tend l'angle θ, quand η et ε se rapprochent indéfiniment de zéro: on a donc, à la limite,

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = \operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2};$$

par suite,

$$dF(\omega) = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\,d\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}.$$

L'équation (1) devient, dès lors,

$$\frac{d\mu}{\mu^2-b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} + \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\,d\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2},$$

et l'on en conclut, en intégrant,

$$\int_c^\mu \frac{d\mu}{\mu^2-b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} + \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} + C.$$

Pour déterminer la constante C, considérons la ligne géodésique particulière qui passe par le sommet de l'axe moyen de l'ellipsoïde, c'est-à-dire par le point pour lequel $\mu = c$, $\nu = 0$. A cause de la symétrie

de la surface, et en se rappelant que toutes les lignes géodésiques qui partent d'un ombilic vont aboutir à l'ombilic opposé, on voit aisément que l'angle ω doit alors être droit [*]. On peut donc faire à la fois

$$\mu = c, \quad \nu = 0, \quad \omega = \frac{\pi}{2},$$

et de la résulte $C = 0$. Ainsi, l'équation de la ligne géodésique OP peut s'écrire définitivement de la manière suivante :

$$(2)\quad \int_c^\mu \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} + \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}.$$

L'équation de la ligne géodésique O'P qui passe par l'ombilic O' sera de même

$$(3)\quad \int^\mu \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} - \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\log\operatorname{tang}\frac{\omega'}{2}.$$

Le signe de la seconde intégrale est changé, et l'angle ω ou POO' est remplacé par PO'O ou ω'.

Les équations (2) et (3), combinées par addition et par soustraction, en fournissent deux autres, l'une entre μ, ω, ω', l'autre entre ν, ω, ω'.

---

[*] J'ai déjà fait cette remarque dans une Lettre à M. Liouville (tome XII de ce Journal, page 491), et j'en ai conclu qu'on peut passer sur l'ellipsoïde d'une des extrémités de l'axe moyen à l'autre par trois chemins géodésiques distincts dont les longueurs sont les demi-circonférences des sections principales de la surface. Il est bon d'ajouter que cette dernière proposition se lie à une certaine propriété de deux points D, D' situés aux deux extrémités d'un diamètre quelconque de l'ellipsoïde. En effet, si l'on joint le point D à un ombilic O par une ligne géodésique, cette ligne qui passera également par l'ombilic opposé O'' devra évidemment passer aussi par le point D'; et il est clair que la distance géodésique DD' sera égale à OO'', c'est-à-dire à la demi-circonférence de la section principale perpendiculaire à l'axe moyen. A ce chemin géodésique de D à D' s'ajoutera un second chemin sur une section principale perpendiculaire au grand ou au petit axe, si D et D' sont situés sur une telle section, et même deux chemins, si D et D' sont sur les deux sections à la fois, c'est-à-dire sont aux extrémités de l'axe moyen. Voilà bien ce que nous avions trouvé d'abord en discutant séparément ce dernier cas.

En supposant μ ou ν constante, on a ainsi la relation qui doit exister aux divers points d'une même ligne de courbure entre les angles ω, ω'. Cela conduit aux théorèmes suivants :

I. Soient O, O' les ombilics dont nous venons de parler, et P un point tel que

$$\tang \frac{POO'}{2} \cdot \tang \frac{PO'O}{2} = \text{constante [*]},$$

le lieu de P sera une des lignes de courbure données par l'équation

$$\mu = \text{constante}.$$

II. Si nous avons

$$\frac{\tang \frac{POO'}{2}}{\tang \frac{PO'O}{2}} = \text{constante},$$

le lieu géométrique de P sera une des lignes de courbure données par l'équation

$$\nu = \text{constante}.$$

De là résultent de nombreux corollaires. Par exemple :

III. Si une ligne géodésique qui passe par l'ombilic O rencontre aux points P, P' une ligne de courbure donnée (μ), on aura

$$\tang \frac{PO'O}{2} \cdot \tang \frac{P'O'O}{2} = \text{constante}.$$

IV. Si une ligne géodésique qui passe par l'ombilic O rencontre aux points P, P' une ligne de courbure donnée (ν), on aura

$$\frac{\tang \frac{PO'O}{2}}{\tang \frac{P'O'O}{2}} = \text{constante}.$$

V. Si l'on joint un point P d'une ligne de courbure aux deux ombilics O, O' par deux lignes géodésiques qui rencontrent de nouveau

[*] Tous ces angles sont formés sur la surface par les lignes géodésiques.

la ligne de courbure respectivement aux points P′, P″, le lieu du point d'intersection Q des lignes géodésiques OP″, O′P′ sera aussi une ligne de courbure de la même espèce.

VI. Si l'on tire d'un point P deux lignes géodésiques qui passent par les ombilics O, O′, et qui rencontrent une ligne de courbure donnée respectivement aux points Q, Q′, R, R′; si, en outre, P se meut sur une ligne de courbure de la même espèce que la première, l'intersection S des lignes OR, O′Q, et celle S′ des lignes OR′, O′Q′, décriront deux lignes de courbure de la même espèce.

Il suit de là que si nous joignons un point P, pris sur une ligne de courbure, aux deux ombilics O et O′, par deux lignes géodésiques qui rencontrent la courbe une seconde fois aux points Q, Q′, et que nous tirions ensuite les lignes géodésiques O′Q, OQ′ qui rencontrent une seconde fois la ligne de courbure respectivement aux points R, R′, les intersections de OQ′, O′Q et de OR, O′R′ décriront deux lignes de courbure de même espèce que la première. Et comme cette construction peut se continuer *ad infinitum* en prolongeant encore OR, O′R′ jusqu'en S et S′ sur la ligne de courbure primitive, puis joignant OS′, O′S, etc., nous pouvons faire dériver d'une ligne de courbure donnée une suite infinie de lignes de même espèce. Si nous désignons par μ, μ', μ'',..., $\mu^{(n)}$,..., les constantes de ces lignes, nous obtiendrons facilement

$$\int_c^{\mu^{(n)}} \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} = (2n+1)\int_c^{\mu} \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}};$$

ce qui fournit une construction géométrique pour la multiplication, par un nombre impair, de l'intégrale

$$\int_c^{\mu} \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}}\ [*].$$

---

[*] Ce théorème, appliqué au cas des coniques planes, donne une traduction géométrique de quelques résultats dans la théorie des fonctions elliptiques. Par exemple, ayant fait dériver d'une ellipse donnée une suite d'ellipses homofocales par la construction indiquée dans le texte, cherchons le produit des excentricités de toutes ces ellipses. Pour cela, soit $\tang\frac{\omega}{2}\tang\frac{\omega'}{2} = m$ pour la première courbe; les quantités analogues

Nos formules conduisent à une fonction qui doit remplacer la fonction sinus, pour un arc géodésique $OP = \rho$ issu de l'ombilic O et terminé à un point (μ, ν). Cette fonction, que nous désignerons par P, sera définie par l'équation

$$ds^2 = d\rho^2 + P^2 d\omega^2,$$

qui peut être considérée comme une formule pour la rectification des courbes tracées sur la surface de l'ellipsoïde, et qui sont déterminées par une relation entre le rayon vecteur géodésique ρ et l'angle ω.

Si la courbe est une des lignes de courbure dont l'équation est

$$\mu = \text{constante},$$

on a, par les expressions connues,

$$ds^2 = \frac{(\mu^2 - \nu^2)(a^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)} d\nu^2, \quad d\rho^2 = \frac{a^2 - \nu^2}{c^2 - \nu^2} d\nu^2 \text{ [*]},$$

et, par l'équation (2),

$$\frac{d\nu}{b^2 - \nu^2} \sqrt{\frac{a^2 - \nu^2}{c^2 - \nu^2}} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \frac{d\omega}{\sin \omega};$$

de là nous tirons, pour P^2, l'expression suivante,

$$P^2 = \frac{(a^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{b^2 (c^2 - b^2) \sin^2 \omega},$$

qui détermine P.

---

pour les autres seront m^3, m^5, m^7,..., et en désignant par ε, ε', ε'',... les excentricités des courbes qui forment la suite, on aura

$$\varepsilon = \frac{1 - m}{1 + m}, \quad \varepsilon' = \frac{1 - m^3}{1 + m^3}, \quad \varepsilon'' = \frac{1 - m^5}{1 + m^5}, \ldots.$$

On a donc

$$\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''\ldots = \frac{1 - m}{1 + m} \cdot \frac{1 - m^3}{1 + m^3} \cdot \frac{1 - m^5}{1 + m^5} \cdots;$$

en sorte que si l'on pose $m = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$, K, K' étant les fonctions complètes à modules complémentaires k, k', il viendra, par une formule connue,

$$\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''\ldots = \sqrt[4]{k'}.$$

[*] *Voir* tome IX, page 402, et tome XI, page 3.

On voit donc que

$$P \sin \omega = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{c^2-b^2}}.$$

Mais cette dernière quantité exprime la distance du point (μ, ν) au plan qui contient les ombilics, ou, en d'autres termes, est l'y de ce point dans le système ordinaire des coordonnées rectangulaires [*]. Elle ne changera pas si, au lieu de l'ombilic O et de la fonction P, on considère l'ombilic O' et une fonction P' qui soit pour un arc partant de ce dernier ombilic ce que P est pour l'arc ρ. On a donc

$$P \sin \omega = y = P' \sin \omega',$$

ou

$$\frac{P}{P'} = \frac{\sin \omega'}{\sin \omega},$$

équation analogue à celles qui, dans la trigonométrie plane ou sphérique, expriment que les côtés ou les sinus des côtés d'un triangle sont entre eux comme les sinus des angles opposés.

Nous avons aussi le théorème suivant, qui pourra être utile :

Si nous menons par l'ombilic O deux lignes géodésiques infiniment voisines, l'arc infiniment petit qui les coupe sous un angle droit a pour expression $y \frac{d\omega}{\sin \omega}$, y se rapportant à l'une quelconque des extrémités de cet arc.

Si nous voulons exprimer la fonction P par les coordonnées elliptiques, nous poserons

$$M = e^{b\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}}\int_c^\mu \frac{d\mu}{\mu^2-b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}}}, \quad N = e^{b\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}}\int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}}},$$

et nous aurons, par l'équation (1),

$$\tang \frac{\omega}{2} = MN$$

ou

$$\sin \omega = \frac{2MN}{1+M^2N^2},$$

[*] *Voir* tome XI, page 218.

d'où

$$P = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{c^2-b^2}}\,\frac{(1+M^2N^2)}{2MN}.$$

La fonction P' relative à l'arc qui passe par l'autre ombilic s'obtiendra en substituant $\frac{1}{N}$ à N dans l'expression de P ; ce qui donne

$$P' = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{c^2-b^2}}\,\frac{(M^2+N^2)}{2MN}.$$

Ces formules deviennent illusoires si l'arc géodésique coïncide avec la section principale qui contient les ombilics. Mais on pourrait obtenir une expression de P délivrée de toute ambiguïté, en faisant usage des fonctions H, Θ introduites dans l'analyse avec tant de succès par M. Jacobi. L'emploi de ces fonctions présentera d'ailleurs, sous plusieurs points de vue, des avantages que nous développerons dans un autre article.

Addition au Mémoire précédent.

Je me propose, dans cette Addition, de mettre l'équation intégrale d'une ligne géodésique quelconque sur un ellipsoïde sous une forme analogue à celle que j'ai donnée pour les lignes géodésiques qui passent par un ombilic. Pour fixer les idées, je supposerai qu'il s'agisse d'une ligne géodésique tangente à une des lignes de courbure représentées par l'équation

$$\mu = \text{constante} = \sqrt{\beta}.$$

L'équation de cette ligne géodésique sera

$$\text{(A)}\quad \int_{\sqrt{\beta}}^{\mu}\frac{\sqrt{a^2-\mu^2}\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2-\beta)(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} \pm \int_{b}^{\nu}\frac{\sqrt{a^2-\nu^2}\,d\nu}{\sqrt{(\beta-\nu^2)(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} = \alpha\,;$$

et si nous désignons par ω l'angle qu'elle forme avec la section prin-

cipale qui contient les ombilics, l'équation de M. Liouville donne la relation suivante entre ω et la valeur de μ au point où notre ligne géodésique va rencontrer la section ombilicale :

$$\mu^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega = \beta,$$

d'où

$$\mu^2 = \beta + (\beta - b^2) \operatorname{cotang}^2 \omega.$$

Nous obtiendrons donc la valeur de α en fonction de ω, en posant dans l'équation de la ligne géodésique

$$\nu = b, \quad \mu = \sqrt{\beta + (\beta - b^2) \operatorname{cotang}^2 \omega}.$$

Cela donne

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sqrt{\frac{a^2-\beta}{c^2-\beta}} \int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \frac{\beta - b^2}{a^2-\beta} \operatorname{cotang}^2 \omega}{1 - \frac{\beta - b^2}{c^2 - \beta} \operatorname{cotang}^2 \omega}} \frac{\operatorname{coséc} \omega d\omega}{\sqrt{1 + \frac{\beta - b^2}{\beta} \operatorname{cotang}^2 \omega}}.$$

En observant que le double signe contenu dans l'équation (A) provient des deux lignes géodésiques qu'on peut mener par un point (μ, ν) tangentiellement à la ligne de courbure, le signe + se rapportant à l'une de ces lignes géodésiques et le signe − à l'autre, on déduit de cette expression le théorème suivant :

Si deux lignes géodésiques menées d'un quelconque des points d'une ligne de courbure tangentiellement à une autre ligne de courbure de la même espèce, font avec la section ombilicale les angles ω et ω', on a

$$\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \frac{\beta - b^2}{a^2-\beta} \operatorname{cotang}^2 \omega}{1 - \frac{\beta - b^2}{c^2 - \beta} \operatorname{cotang}^2 \omega}} \frac{\operatorname{coséc} \omega d\omega}{\sqrt{1 + \frac{\beta - b^2}{\beta} \operatorname{cotang}^2 \omega}}$$

$$+ \int_{\omega'}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \frac{\beta - b^2}{a^2-\beta} \operatorname{cotang}^2 \omega'}{1 - \frac{\beta - b^2}{c^2 - \beta} \operatorname{cotang}^2 \omega'}} \frac{\operatorname{coséc} \omega' d\omega'}{\sqrt{1 + \frac{\beta - b^2}{\beta} \operatorname{cotang}^2 \omega'}} = \text{constante}.$$

Cette relation peut être regardée comme une généralisation du théorème I ci-dessus.

On a aussi le théorème suivant :

Si l'on tire des deux points P, Q pris sur la même ligne de courbure deux paires de tangentes géodésiques PT, PT', QR, QR', à une autre ligne de courbure de la même espèce TT'RR' (T, T', R, R' sont les points de contact), et que l'intersection des lignes PT et QR' décrive une ligne de courbure de même espèce que la première, l'intersection des lignes PT' et QR décrira aussi une autre ligne de même espèce.

SUR UN THÉORÈME RELATIF AUX NOMBRES ENTIERS;

PAR M. J.-A. SERRET.

En cherchant une démonstration élémentaire de ce théorème connu : *Tout nombre premier $4k+1$ est la somme de deux carrés,* je suis parvenu aux propositions suivantes qui me semblent dignes d'être signalées.

THÉORÈME I. *Si -1 est résidu quadratique par rapport à p, en sorte qu'on ait*

$$q^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

q étant pris inférieur à p, et que l'on réduise en fraction continue la fraction $\frac{p}{q}$, en s'arrangeant de manière que le nombre des quotients soit pair, ce qui est toujours possible, puisque, si ce nombre est impair, on peut diminuer le dernier quotient d'une unité et prendre un quotient de plus égal à 1, les termes également distants des extrêmes dans la suite des quotients seront égaux entre eux.

En effet, si l'on désigne par q_0 le quotient de q^2+1 par p, on aura

$$pq_0 - qq = 1,$$

d'où il suit que $\frac{q}{q_0}$ est la fraction convergente qui précède $\frac{p}{q}$; par conséquent, en développant $\frac{q}{q_0}$ en fraction continue, on trouvera les quotients de $\frac{p}{q}$, sauf le dernier. Mais, d'un autre côté, des relations connues entre les dénominateurs des diverses fractions convergentes on déduit que les quotients de $\frac{q}{q_0}$, réduite en fraction continue, sont les mêmes

que ceux de $\frac{p}{q}$, sauf le premier, mais en ordre inverse; d'où il suit évidemment que, dans la suite des quotients de $\frac{p}{q}$, les termes également distants des extrêmes sont égaux.

Corollaire. *Tout nombre premier $4k+1$, ou plus généralement, tout nombre qui divise une somme de deux carrés, est lui-même la somme de deux carrés.*

Si p divise une somme de deux carrés, -1 est résidu quadratique par rapport à p; et en posant

$$q^2 \equiv -1 \quad (\text{mod. } p),$$

avec $q < p$, la suite des quotients dans le développement de $\frac{p}{q}$ sera, d'après le théorème précédent, disposée comme il suit :

$$\alpha,\ \beta,\ldots,\ \mu,\ \omega,\ \omega,\ \mu,\ldots,\ \beta,\ \alpha.$$

Soient $\frac{m}{n}$ la fraction convergente qui comprend les quotients de la première moitié de la suite, $\frac{m_0}{n_0}$ la précédente, il est évident que $\frac{m}{m_0}$ sera la valeur de la fraction continue ayant pour quotients ceux de la seconde moitié de la suite. D'ailleurs, la fraction convergente qui suit $\frac{m}{n}$ a pour valeur $\frac{m\omega + m_0}{n\omega + n_0}$, et en y remplaçant ω par $\frac{m}{m_0}$, on aura la valeur de $\frac{p}{q}$, savoir,

$$\frac{p}{q} = \frac{m\dfrac{m}{m_0} + m_0}{n\dfrac{m}{m_0} + n_0} = \frac{m^2 + m_0^2}{mn + m_0 n_0}.$$

Donc

$$p = m^2 + m_0^2. \qquad\qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Théorème II. *Si l'on a*

$$q^2 \equiv 1 \quad (\text{mod. } p),$$

q étant pris inférieur à p, et que l'on réduise en fraction continue la fraction $\frac{p}{q}$, en s'arrangeant de manière que le nombre des quotients soit

impair, ce qui est toujours possible, les termes également distants des extrêmes dans la suite des quotients seront égaux entre eux.

La démonstration est identique à celle du théorème I.

Legendre a donné dans sa *Théorie des nombres* une démonstration du corollaire de notre théorème I, qui est fondée sur la considération du développement en fraction continue de la racine carrée d'un nombre entier. Cette démonstration présente quelque analogie avec la nôtre, analogie qui résulte de ce que les quotients d'une période dans le développement de la racine d'un nombre entier sont précisément disposés comme ceux des fractions ordinaires que nous considérons dans les théorèmes I et II.

J'énoncerai, à ce sujet, une dernière proposition dont la démonstration ne présente aucune difficulté.

Si l'on développe en fraction continue la racine carrée d'un nombre entier A, et que a soit la racine du plus grand carré contenu dans A, le dernier quotient de chaque période sera, comme on sait, $2a$; et les autres formeront une suite telle que

$$\alpha,\ \beta,\ldots,\ \beta,\ \alpha,$$

composée d'un nombre pair ou impair de termes, et dans laquelle les termes également distants des extrêmes sont égaux. Appelons, pour abréger, *fraction correspondante* au nombre A la fraction ordinaire $\frac{p}{q}$ qui donnerait lieu aux quotients α, β,.., β, α; on peut trouver très-aisément tous les nombres entiers ayant la même fraction correspondante $\frac{p}{q}$, problème qui ne pourra être impossible que si p est un nombre pair.

Cela posé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME III. Lorsqu'une suite *symétrique,* telle que

$$\alpha,\ \beta,\ldots,\ \beta,\ \alpha,$$

ne donne pas lieu à une fraction *correspondante,* en supprimant le terme du milieu s'il y en a un, ou en en mettant un quelconque s'il n'y en a pas, on obtiendra une nouvelle suite de quotients donnant lieu à une fraction correspondante.

Note de M. Hermite.

Depuis longtemps j'avais trouvé de mon côté la démonstration élémentaire suivante du théorème relatif aux nombres premiers $4k+1$.

Supposant

$$a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

convertissons $\frac{a}{p}$ en fraction continue jusqu'à ce qu'on obtienne deux réduites consécutives $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, telles que n soit $< \sqrt{p}$ et $n' > \sqrt{p}$; on aura, comme on sait,

$$\frac{a}{p} = \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{nn'},$$

où ε est < 1. De là on tire

$$na - mp = \varepsilon \cdot \frac{p}{n'}:$$

donc

$$(na - mp)^2 < p.$$

Ajoutant membre à membre avec

$$n^2 < p,$$

il vient

$$(na - mp)^2 + n^2 < 2p.$$

Or le premier membre de cette inégalité est un multiple entier de p d'après la condition

$$a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

il faut donc qu'on ait précisément

$$(na - mp)^2 + n^2 = p.$$

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. CHASLES A M. LIOUVILLE.

« Chartres, 8 octobre 1847.

» . . . Voici une assez belle propriété des surfaces homofocales. Vous savez que, dans un plan, le quadrilatère circonscrit à une conique et à un cercle, a deux sommets opposés sur une conique homofocale [*]. Dans l'espace, *la surface developpable circonscrite à une surface du second degré et à une sphère a chacune de ses quatre lignes de striction (quatre coniques planes) sur une surface homofocale à la proposée.* Ainsi, quand un point suffit pour déterminer une surface homofocale, on trouve ici une conique tout entière située sur une telle surface.

» Autre propriété des surfaces homofocales :

» *Quand plusieurs sphères touchent une surface du second degré en un même point, si l'on circonscrit à la surface et à chaque sphère une développable, toutes ces surfaces développables auront leurs lignes de striction sur une même surface du second degré homofocale à la proposée.*

» Si les sphères touchent la surface en l'un de ses ombilics, les développables circonscrites seront des cônes, et leurs lignes de striction se réduiront à de simples points, sommets des cônes; *ces sommets seront sur la conique focale qui passe par les ombilics de la surface....* »

---

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* tome XVII, page 838, année 1843, deuxième semestre.

THÈSE

SUR LE

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL ATTIRÉ PAR DEUX CENTRES FIXES,

EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DES DISTANCES;

PAR M. J.-A. SERRET.

§ I.

Euler a le premier traité le problème de la détermination du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes, suivant la loi ordinaire de l'inverse du carré des distances. En supposant que le mouvement s'accomplisse dans un plan, il est parvenu à séparer les variables et à ramener la question aux quadratures [*]. Lagrange en a donné ensuite une solution nouvelle, qui n'est plus bornée au cas du plan, et il a même ajouté un troisième centre fixe placé au milieu de la droite qui joint les deux autres, et doué d'une action attractive ou répulsive, proportionnelle à la distance [**]. Legendre, à son tour, a approfondi les détails de la question avec un soin tout particulier [***]. On lui doit cette remarque importante, que les variables employées par Euler peuvent être considérées comme les paramètres d'ellipses et d'hyperboles qui ont pour foyers les centres fixes, et dont l'intersection détermine le point mobile; par où l'on voit que les coordonnées elliptiques, dont

[*] *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1760.

[**] *Mécanique analytique*, tome II, page 108, et *Anciens Mémoires de Turin*, tome IV.

[***] *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 411.

les géomètres ont fait un si grand usage dans ces derniers temps, se sont présentées, pour la première fois, dans un problème de mécanique. Enfin M. Jacobi a pris cette question des deux centres fixes pour un des exemples de l'application de son principe du dernier multiplicateur [*], et M. Liouville s'en est occupé dernièrement aussi dans une étude générale sur différents cas où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer. M. Liouville a donné deux méthodes [**], qui l'une et l'autre s'appliquent à notre problème. L'une est fondée sur la considération des équations aux différentielles partielles; l'autre, qui conduit à des résultats moins étendus, est peut-être plus élémentaire : mais M. Liouville ne l'a développée que pour le cas du plan, en observant toutefois qu'elle peut aussi s'étendre au cas général de l'espace. C'est cette extension de la méthode de M. Liouville que nous nous proposons de présenter ici.

§ II.

La position d'un point sur un plan, ou plus généralement sur une surface quelconque, est déterminée par deux coordonnées α et β, qui sont des fonctions prises à volonté, de ses coordonnées rectangulaires. Tout déplacement infiniment petit ds du point sur la surface s'exprimera par les accroissements $d\alpha$, $d\beta$ de ces coordonnées, et son carré aura la forme

$$ds^2 = \lambda d\alpha^2 + \lambda' d\beta^2,$$

toutes les fois que les équations

$$\alpha = \text{constante}, \qquad \beta = \text{constante}$$

seront celles de deux systèmes de lignes orthogonales. Cette condition, qui est nécessaire, est également suffisante; en sorte qu'il existera pour chaque surface une infinité de systèmes de coordonnées, dans lesquels ds^2 aura la forme précédente.

Si maintenant on considère un point situé d'une manière quelconque dans l'espace, et que l'on fasse passer un plan par ce point et par une

---

[*] *Journal de Crelle*, tomes XXVII et XXIX.

[**] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tomes XI et XII.

droite fixe, on pourra déterminer la position du point dans ce plan, par deux coordonnées α, β du genre de celles qu'on vient d'indiquer, et l'on achèvera de fixer sa position dans l'espace à l'aide d'une troisième coordonnée γ, dont les différentes valeurs correspondront aux différentes positions que peut prendre le plan que nous considérons autour de l'axe qu'il contient. Par exemple, on pourra prendre pour γ l'angle que fait ce plan avec un plan fixe mené par l'axe fixe.

Cela posé, si ds désigne le déplacement infiniment petit du point correspondant aux accroissements $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ de ses trois coordonnées, ds' le déplacement obtenu en ne faisant varier que α et β, et enfin λ'' le carré de la distance du point à l'axe fixe, on aura évidemment

$$ds^2 = ds'^2 + \lambda'' d\gamma^2,$$

et, par conséquent,

$$ds^2 = \lambda d\alpha^2 + \lambda' d\beta^2 + \lambda'' d\gamma^2.$$

Dans cette formule, les quantités λ, λ', λ'' ne renferment que les deux coordonnées α et β, qui peuvent être choisies d'une multitude de manières différentes; quant à la coordonnée γ, sa signification géométrique est parfaitement déterminée par ce qui précède. Au reste, la forme de l'expression de ds^2 resterait la même, si l'on prenait pour α, β, γ les paramètres de trois systèmes quelconques de surfaces orthogonales; alors λ, λ', λ'' pourraient être des fonctions des trois coordonnées α, β, γ. Mais, loin d'avoir besoin de ce degré de généralité, nous nous restreindrons encore à un cas plus particulier, celui où $\lambda' = \lambda$, que M. Liouville a considéré dans le cas du plan. Ainsi, désormais nous prendrons

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2) + \lambda'' d\gamma^2,$$

λ et λ'' étant, nous le répétons, indépendants de γ.

§ III.

Considérons maintenant le mouvement d'un point matériel déterminé par les trois coordonnées α, β, γ dont il vient d'être question, et supposons que le principe des forces vives ait lieu; on aura, en désignant par ds l'élément parcouru pendant le temps dt, par U la fonc-

tion des forces accélératrices, et par C une constante arbitraire,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}),$$

ou

$$(1) \qquad \lambda\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2}\right) + \lambda'' \frac{d\gamma^2}{dt^2} = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}).$$

Cette équation, qu'il est plus simple et plus convenable de former directement, se déduit aussi des équations du mouvement, qui, d'après les principes de la *Mécanique analytique,* et en se rappelant que λ et λ'' ne contiennent pas γ, sont :

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{d\lambda''}{d\alpha}\frac{d\gamma^2}{dt^2} + \frac{d\mathrm{U}}{d\alpha},\\ &\frac{d.\lambda\frac{d\beta}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\beta}\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{d\lambda''}{d\beta}\frac{d\gamma^2}{dt^2} + \frac{d\mathrm{U}}{d\beta},\\ &\frac{d.\lambda''\frac{d\gamma}{dt}}{dt} = \frac{d\mathrm{U}}{d\gamma}.\end{aligned}\right.$$

Nous supposerons que la dérivée $\frac{d\mathrm{U}}{d\gamma}$ est toujours nulle, ou que U ne dépend pas de la coordonnée γ. Cela arrivera nécessairement toutes les fois que les forces agissant sur le mobile, seront toutes situées à chaque instant dans le plan déterminé par l'angle γ correspondant, circonstance qui se présentera dans le problème que nous nous sommes proposé de résoudre. Ayant ainsi

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\gamma} = 0,$$

la dernière des équations précédentes nous donnera

$$\frac{d.\lambda''\frac{d\gamma}{dt}}{dt} = 0,$$

et, en intégrant,

$$(3) \qquad \lambda''\frac{d\gamma}{dt} = \sqrt{\mathrm{B}},$$

B désignant une constante arbitraire; alors l'équation (1) des forces

vives donnera

$$(4)\qquad \frac{d\alpha^2}{dt^2}+\frac{d\beta^2}{dt^2}=\frac{2(U+C)-\frac{B}{\lambda''}}{\lambda}.$$

En vertu des équations (3) et (4), les deux premières des équations (2) deviendront

$$\frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt}=\frac{1}{\lambda}(U+C)\frac{d\lambda}{d\alpha}+\frac{dU}{d\alpha}-\frac{B}{2\lambda\lambda''^2}\left(\lambda''\frac{d\lambda}{d\alpha}-\lambda\frac{d\lambda''}{d\alpha}\right),$$

$$\frac{d.\lambda\frac{d\beta}{dt}}{dt}=\frac{1}{\lambda}(U+C)\frac{d\lambda}{d\beta}+\frac{dU}{d\beta}-\frac{B}{2\lambda\lambda''^2}\left(\lambda''\frac{d\lambda}{d\beta}-\lambda\frac{d\lambda''}{d\beta}\right).$$

Ces équations, respectivement multipliées par $2\lambda d\alpha$, $2\lambda d\beta$, prennent la forme très-simple

$$(5)\qquad \begin{cases} d\left(\lambda^2\frac{d\alpha^2}{dt^2}\right)=\dfrac{d\left(2\lambda U+2C\lambda-B\frac{\lambda}{\lambda''}\right)}{d\alpha}\,d\alpha, \\ d\left(\lambda^2\frac{d\beta^2}{dt^2}\right)=\dfrac{d\left(2\lambda U+2C\lambda-B\frac{\lambda}{\lambda''}\right)}{d\beta}\,d\beta, \end{cases}$$

dont l'une résulte de l'autre en vertu de l'équation des forces vives, ou plutôt en vertu des équations (3) et (4).

Elles ne diffèrent de celles qui sont relatives au plan, que par le terme $B\frac{\lambda}{\lambda''}$ qui disparaîtrait dans ce cas, et qui n'apporte d'ailleurs aucune complication.

Les équations (5) pourront évidemment être intégrées une fois si leurs seconds membres ne contiennent respectivement, l'un que α, l'autre que β; c'est-à-dire si l'on a

$$(6)\qquad 2\lambda U+2C\lambda-B\frac{\lambda}{\lambda''}=f(\alpha)-F(\beta),$$

les fonctions $f(\alpha)$ et $F(\beta)$ ne contenant la première que α, la seconde que β: alors les équations (5) deviennent

$$d\left(\lambda^2\frac{d\alpha^2}{dt^2}\right)=f'(\alpha)\,d\alpha,$$

$$d\left(\lambda^2\frac{d\beta^2}{dt^2}\right)=-F'(\beta)\,d\beta;$$

d'où, par l'intégration,

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda^2 \dfrac{d\alpha^2}{dt^2} = f(\alpha) - \mathrm{A}, \\ \lambda^2 \dfrac{d\beta^2}{dt^2} = \mathrm{A} - \mathrm{F}(\beta). \end{cases}$$

Nous mettons la même constante A dans ces deux équations, afin que l'équation (4) soit satisfaite.

§ IV.

La double intégration qui vient d'être effectuée repose sur l'hypothèse que nous avons faite, et en vertu de laquelle la quantité $2\lambda\mathrm{U} + 2\mathrm{C}\lambda - \mathrm{B}\frac{\lambda}{\lambda''}$ a la forme $f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta)$. Il pourra arriver, dans certains problèmes, que cette condition ne soit pas remplie généralement, mais qu'elle puisse cependant être satisfaite pour certaines valeurs particulières attribuées aux constantes arbitraires B et C; ce qui se traduira par des relations équivalentes entre les circonstances initiales du mouvement: et quand ces relations auront lieu, on pourra toujours appliquer la méthode précédente. Mais cette méthode est surtout intéressante dans le cas où la condition exprimée par l'équation (6) a lieu indépendamment des valeurs attribuées aux constantes B et C; car on pourra toujours, comme on va voir, résoudre complétement le problème correspondant, et cela pour un état initial quelconque. Il faut alors que chaque terme du premier membre de l'équation (6) soit de même forme que le second membre.

Soit donc

$$(8)\qquad \begin{cases} \lambda = \varphi(\alpha) - \Phi(\beta), \\ \lambda\mathrm{U} = \psi(\alpha) - \Psi(\beta), \\ \dfrac{\lambda}{\lambda''} = \varpi(\alpha) - \Pi(\beta), \end{cases}$$

d'où résultera

$$(9)\qquad \begin{cases} f(\alpha) = 2\psi(\alpha) + 2\mathrm{C}\varphi(\alpha) - \mathrm{B}\varpi(\alpha), \\ \mathrm{F}(\beta) = 2\Psi(\beta) + 2\mathrm{C}\Phi(\beta) - \mathrm{B}\Pi(\beta), \end{cases}$$

et voyons comment on pourra achever, dans ce cas, l'intégration des équations du mouvement.

§ V.

Les équations (7) donnent immédiatement, par la division,

$$(10) \qquad \frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)-A}} = \frac{d\beta}{\sqrt{A-F(\beta)}},$$

équation différentielle où les variables sont séparées, et qui sera l'une de celles de la trajectoire du mobile, ou, si l'on veut, l'équation de la trajectoire du point dans le plan mobile.

Pour avoir la seconde équation de la trajectoire, nous combinerons l'une quelconque des deux équations (7), la première par exemple, avec l'équation (3); on obtient ainsi

$$\frac{\lambda}{\lambda''}\frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{\sqrt{f(\alpha)-A}}{\sqrt{B}},$$

d'où, en mettant au lieu de $\frac{\lambda}{\lambda''}$ sa valeur écrite précédemment,

$$d\gamma = \sqrt{B}\,\frac{\varpi(\alpha)-\Pi(\beta)}{\sqrt{f(\alpha)-A}}\,d\alpha,$$

et, à cause de l'équation (10),

$$(11) \qquad d\gamma = \sqrt{B}\left(\frac{\varpi(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)-A}} - \frac{\Pi(\beta)\,d\beta}{\sqrt{A-F(\beta)}}\right).$$

Cette équation, où les variables sont séparées, est la deuxième équation de la trajectoire du mobile. Il ne reste donc plus que la valeur du temps à déterminer.

On pourra, de l'une quelconque des équations (7), tirer la valeur de l'élément du temps; la première, par exemple, donne

$$dt = \frac{\lambda\,d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)-A}},$$

ou, en mettant au lieu de λ, sa valeur

$$dt = \frac{\varphi(\alpha)-\Phi(\beta)}{\sqrt{f(\alpha)-A}}\,d\alpha;$$

et, en vertu de l'équation (10),

$$(12) \qquad dt = \frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)-A}} - \frac{\Phi(\beta)\,d\beta}{\sqrt{A-F(\beta)}},$$

équation où les variables sont encore séparées. On voit, par les équations (10), (11) et (12), que le problème se trouve ramené aux quadratures. La forme de ces équations mérite d'être remarquée : on voit, par exemple, que l'expression du temps ne dépend que des coordonnées α et β, et qu'on pourra la déterminer sans connaître la coordonnée γ.

En posant

$$\begin{aligned}\Theta = &\int\sqrt{2\psi(\alpha) + 2C\varphi(\alpha) - B\varpi(\alpha) - A}\,.\,d\alpha \\ &+ \int\sqrt{-2\Psi(\beta) - 2C\Phi(\beta) + B\Pi(\beta) + A}\,.\,d\beta + \gamma\sqrt{B},\end{aligned}$$

on donne à ces équations une forme remarquable.

En effet, les intégrales des équations (10), (11) et (12) pourront s'écrire comme il suit :

$$\frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t - t_0,$$

A', B' et t_0 désignant trois nouvelles constantes arbitraires. C'est sous cette forme qu'elles se présentent d'elles-mêmes, quand on fait usage de la méthode d'intégration fondée sur l'emploi d'une équation aux différentielles partielles dont nous avons parlé au § I.

§ VI.

Les résultats qui précèdent ne cesseront pas d'avoir lieu si l'on substitue à α une fonction quelconque d'une nouvelle variable μ, et à β une fonction d'une variable ν ; si l'on pose, en un mot,

$$d\alpha = \sqrt{m}d\mu, \quad d\beta = \sqrt{n}d\nu,$$

ce changement, insignifiant au point de vue théorique, nous sera commode pour l'application de nos formules. L'expression de ds^2 sera alors

$$ds^2 = \lambda(md\mu^2 + nd\nu^2) + \lambda'' d\gamma^2,$$

λ et λ'' représentant des fonctions des variables μ et ν.

Les équations (8) deviendront

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \varphi(\mu) - \Phi(\nu), \\ \lambda U &= \psi(\mu) - \Psi(\nu), \\ \frac{\lambda}{\lambda''} &= \varpi(\mu) - \Pi(\nu), \end{aligned}\right.$$

où les fonctions φ, Φ, etc., n'ont plus évidemment la même signification qu'au § IV. Quant aux équations (10), (11) et (12), qui font connaître la trajectoire du mobile et l'expression du temps, elles seront

$$(14)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{m}d\mu}{\sqrt{2\psi(\mu)+2C\varphi(\mu)-B\varpi(\mu)-A}} = \frac{\sqrt{n}d\nu}{\sqrt{-2\Psi(\nu)-2C\Phi(\nu)+B\Pi(\nu)+A}},\\
&d\gamma = \sqrt{B}\frac{\varpi(\mu)\sqrt{m}d\mu}{\sqrt{2\psi(\mu)+2C\varphi(\mu)-B\varpi(\mu)-A}} - \sqrt{B}\frac{\Pi(\nu)\sqrt{n}d\nu}{\sqrt{-2\Psi(\nu)-2C\Phi(\nu)+B\Pi(\nu)+A}},\\
&dt = \frac{\varphi(\mu)\sqrt{m}d\mu}{\sqrt{2\psi(\mu)+2C\varphi(\mu)-B\varpi(\mu)-A}} - \frac{\Phi(\nu)\sqrt{n}d\nu}{\sqrt{-2\Psi(\nu)-2C\Phi(\nu)+B\Pi(\nu)+A}}.
\end{aligned}\right.$$

§ VII.

Considérons trois axes rectangulaires, dont l'un, celui des x par exemple, soit la droite fixe autour de laquelle tourne le plan déterminé par l'angle γ; prenons aussi pour γ l'angle que fait le plan mobile avec le plan xy, en sorte que cet angle soit nul, quand le plan mobile coïncide avec le plan xy. Cela posé, nous prendrons pour μ et ν les paramètres de deux systèmes d'ellipses et d'hyperboles homofocales situées dans le plan mobile, et qui, lorsque celui-ci coïncidera avec le plan xy, auront pour équations

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} = 1.$$

Ces équations donnent

$$b^2x^2 = \mu^2\nu^2, \quad b^2y^2 = (\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2);$$

et

$$dx^2 + dy^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{d\nu^2}{b^2 - \nu^2}\right).$$

En outre, comme la quantité désignée par λ'' n'est autre que la valeur de y^2 que nous venons d'écrire, on aura cette valeur de ds^2,

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{d\nu^2}{b^2 - \nu^2}\right) + \frac{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{b^2}d\gamma^2;$$

on aura donc alors

$$m = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \quad n = \frac{1}{b^2 - \nu^2}, \quad \lambda = \mu^2 - \nu^2, \quad \lambda'' = \frac{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{b^2},$$

et, par suite,

$$\frac{\lambda}{\lambda''} = \frac{b^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{b^2}{b^2 - \nu^2};$$

en sorte que les quantités λ et $\frac{\lambda}{\lambda''}$ ont bien la forme exigée au § VI, et que l'on pourra appliquer la méthode que nous avons indiquée, toutes les fois que la fonction des forces U aura la forme

$$\frac{\psi(\mu) - \Psi(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

M. Liouville a démontré que le système des coordonnées elliptiques est le seul dans lequel la quantité λ a la forme exigée; il est remarquable que, dans le cas plus général de l'espace, la quantité $\frac{\lambda}{\lambda''}$ ait aussi la même forme, ce qui nous a permis de faire cette extension de la méthode.

Nous pourrons donc poser

$$\varphi(\mu) = \mu^2, \qquad \Phi(\nu) = \nu^2,$$
$$\varpi(\mu) = \frac{b^2}{\mu^2 - b^2}, \qquad \Pi(\nu) = \frac{-b^2}{b^2 - \nu^2};$$

en sorte que les équations (14) deviendront

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)[2\psi(\mu) + 2C\mu^2 - A] - Bb^2}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)[2\Psi(\nu) + 2C\nu^2 - A] - Bb^2}},\\ &d\gamma = b^2\sqrt{B}\,\frac{d\mu}{(\mu^2 - b^2)\sqrt{(\mu^2 - b^2)[2\psi(\mu) + 2C\mu^2 - A] - Bb^2}} - b^2\sqrt{B}\,\frac{d\nu}{(\nu^2 - b^2)\sqrt{(\nu^2 - b^2)[2\Psi(\nu) + 2C\nu^2 - A] - Bb^2}},\\ &dt = \frac{\mu^2\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)[2\psi(\mu) + 2C\mu^2 - A] - Bb^2}} - \frac{\nu^2\,d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)[2\Psi(\nu) + 2C\nu^2 - A] - Bb^2}}, \end{aligned} \right.$$

et résoudront tout problème de mouvement d'un point, dans lequel la fonction des forces sera de la forme

$$(16)\qquad U = \frac{\psi(\mu) - \Psi(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Il est presque superflu d'ajouter ici que, pour obtenir tous les points du plan mobile, il est nécessaire de donner aux quantités ν, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$ des valeurs tantôt positives, tantôt négatives. On sait, du reste, que

les géomètres font disparaître cette difficulté relative aux signes en introduisant un angle θ à la place de ν, savoir, en posant

$$\nu = b\cos\theta \quad \text{et} \quad \sqrt{b^2 - \nu^2} = b\sin\theta.$$

Nous allons actuellement faire l'application de la méthode précédente au problème du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré des distances, et nous ajouterons même, avec Lagrange, un troisième centre placé au milieu de la droite qui joint les deux premiers, et doué d'une action proportionnelle à la distance.

§ VIII.

Prenons pour les trois centres fixes les foyers et le centre des ellipses et des hyperboles orthogonales dont il vient d'être question, et désignons par r, r' et R les rayons vecteurs issus de ces centres; la fonction des forces aura pour valeur

$$U = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + KR^2,$$

g, g' et K désignant trois constantes données, que l'on peut supposer à volonté positives ou négatives.

Mais on a évidemment

$$r = \mu + \nu, \quad r' = \mu - \nu, \quad R^2 = \mu^2 + \nu^2 - b^2;$$

donc

$$\begin{aligned} U &= \frac{g}{\mu+\nu} + \frac{g'}{\mu-\nu} + K(\mu^2 + \nu^2 - b^2) \\ &= \frac{[(g+g')\mu - Kb^2\mu^2 + K\mu^4] - [(g-g')\nu - Kb^2\nu^2 + K\nu^4]}{\mu^2 - \nu^2}. \end{aligned}$$

On voit que la fonction U a, dans ce cas, la forme exigée par notre méthode d'intégration, et, en comparant sa valeur à l'équation (16), on pourra poser

$$\begin{aligned} \psi(\mu) &= (g+g')\mu - Kb^2\mu^2 + K\mu^4, \\ \Psi(\nu) &= (g-g')\nu - Kb^2\nu^2 + K\nu^4; \end{aligned}$$

d'où il suit qu'en substituant ces valeurs de $\psi(\mu)$ et $\Psi(\nu)$, les équations (15) feront connaître la solution du problème qui dépendra, dans le cas général, des fonctions abéliennes. Toutefois, ces transcendantes

4..

se réduiront à de simples fonctions elliptiques, si l'on ne considère que les deux premiers centres fixes, c'est-à-dire si l'on fait $K = 0$.

En posant, pour abréger,

$$M = (\mu^2 - b^2)[2K\mu^4 + 2(C - Kb^2)\mu^2 + 2(g + g')\mu - A] - Bb^2,$$
$$N = (\nu^2 - b^2)[2K\nu^4 + 2(C - Kb^2)\nu^2 + 2(g - g')\nu - A] - Bb^2,$$

les équations (15) donneront

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\mu}{\sqrt{M}} = \frac{d\nu}{\sqrt{N}}, \\ &d\gamma = b^2\sqrt{B}\left[\frac{d\mu}{(\mu^2 - b^2)\sqrt{M}} - \frac{d\nu}{(\nu^2 - b^2)\sqrt{N}}\right], \\ &dt = \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{M}} - \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \right.$$

Celles-ci fourniront la solution générale de notre problème, et l'on reviendrait au cas du plan en posant $B = 0$.

Quant aux trois constantes A, B, C qui entrent dans les équations (17), on les déterminera aisément par les conditions initiales du mouvement. Ainsi, en désignant par μ_0, ν_0, γ_0, μ'_0, ν'_0, γ'_0 les valeurs de μ, ν, γ, $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ pour $t = 0$, et par V la vitesse initiale dont l'expression dépend de ces six quantités, on aura

$$C = \frac{1}{2}V^2 - \frac{g}{\mu_0 + \nu_0} - \frac{g'}{\mu_0 - \nu_0} - K(\mu_0^2 + \nu_0^2 - b^2),$$
$$B = \frac{(\mu_0^2 - b^2)^2(b^2 - \nu_0^2)^2}{b^4}\gamma'^2_0,$$

et enfin A se déterminera par l'une des équations

$$M_0 = (\mu_0^2 - \nu_0^2)^2\mu'^2_0, \qquad N_0 = (\mu_0^2 - \nu_0^2)^2\nu'^2_0,$$

où M_0 et N_0 désignent ce que deviennent M et N par le changement de μ et ν en μ_0 et ν_0. Les constantes étant ainsi déterminées, on pourra écrire les équations suivantes, qui font connaître la trajectoire du mobile et l'expression du temps :

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{M}} = \int_{\nu_0}^{\nu}\frac{d\nu}{\sqrt{N}}, \\ &\gamma = \gamma_0 + b^2\sqrt{B}\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{d\mu}{(\mu^2 - b^2)\sqrt{M}} - b^2\sqrt{B}\int_{\nu_0}^{\nu}\frac{d\nu}{(\nu^2 - b^2)\sqrt{N}}, \\ &t = \int_{\mu_0}^{\mu}\frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{M}} - \int_{\nu_0}^{\nu}\frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \right.$$

Il résulte des principes de la théorie des fonctions elliptiques, que dans une infinité de cas, et si $K = o$, la première des équations (17) admettra une intégrale générale algébrique, et qu'ainsi à la première des équations (18), qui est transcendante, on pourra substituer une équation algébrique qui sera celle de la trajectoire du mobile dans le plan, variable ou invariable, que détermine l'angle γ; cette équation renfermera d'ailleurs les deux quantités μ et ν, qui seront par conséquent toutes deux variables. Cependant il peut arriver que, quelle que soit la valeur de K, la trajectoire du mobile soit une ellipse ou une hyperbole ayant pour foyers et pour centre les trois centres fixes, auquel cas son équation sera

$$\mu = \text{une constante}, \quad \text{ou} \quad \nu = \text{une constante}.$$

C'est ce que nous allons maintenant expliquer.

§ IX.

La première des équations (17), où A, B, C ont des valeurs déterminées, admet, outre son intégrale générale, la solution particulière

$$MN = o;$$

en sorte que l'on pourra la vérifier en prenant pour μ l'une des racines de $M = o$, ou pour ν l'une des racines de $N = o$. Mais pour que cette solution particulière de l'équation différentielle puisse convenir à notre problème, il faut d'abord que l'on ait

$$M_0 = o, \quad \text{ou} \quad N_0 = o,$$

c'est-à-dire

$$\mu'_0 = o, \quad \text{ou} \quad \nu'_0 = o,$$

auquel cas la trajectoire du mobile aurait pour équation

$$\mu = \mu_0, \quad \text{ou} \quad \nu = \nu_0.$$

En outre, cette condition, qui est nécessaire, n'est pas suffisante; car la trajectoire indiquée par la solution particulière ne saurait évidemment convenir que dans le cas où la solution générale fournie par les équations (18) serait en défaut, ce qui ne peut arriver que si quelques-unes des intégrales définies qu'elles contiennent, deviennent

infinies. Or, pour que l'intégrale

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M}},$$

dont l'élément est supposé infini pour $\mu = \mu_0$, soit elle-même infinie, il faut évidemment que le polynôme M contienne le facteur $\mu - \mu_0$ au moins à la seconde puissance, ou, en d'autres termes, que l'équation

$$M = 0$$

ait au moins deux racines égales à μ_0.

Ainsi la trajectoire du mobile sera l'ellipse $\mu = \mu_0$, ou l'hyperbole $\nu = \nu_0$, si l'on a

$$M_0 = 0, \quad \left(\frac{dM}{d\mu}\right)_0 = 0,$$

ou

$$N_0 = 0, \quad \left(\frac{dN}{d\nu}\right)_0 = 0.$$

C'est le résultat auquel est parvenu Lagrange dans sa *Mécanique analytique*, à l'aide de considérations qui me semblent moins élégantes et moins rigoureuses que les précédentes [*].

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'une trajectoire elliptique, et ne considérons, pour plus de simplicité, que le cas où l'on a $K = 0$ et $B = 0$, c'est-à-dire le cas où le mobile se meut dans un plan fixe, et n'est attiré que par deux centres fixes en raison inverse du carré des distances; on aura simplement

$$M = (\mu^2 - b^2)[2C\mu^2 + 2(g + g')\mu - A],$$
$$N = (\nu^2 - b^2)[2C\nu^2 + 2(g - g')\nu - A].$$

Nous voulons que l'équation $M = 0$ ait deux racines égales à μ_0; nous supposons, d'ailleurs, que μ_0 n'est pas égal à b, ce qui correspondrait à un mouvement rectiligne : il faudra donc que l'équation

$$2C\mu^2 + 2(g + g')\mu - A = 0$$

[*] *Mécanique analytique*, tome II, page 115.

ait ses deux racines égales à μ_0, ce qui exige que l'on ait

$$C = -\frac{g+g'}{2\mu_0}, \qquad A = (g+g')\mu_0;$$

d'où il résulte, pour la vitesse initiale dirigée suivant la tangente à l'ellipse μ_0,

$$V^2 = \frac{g(\mu_0 - \nu_0)^2 + g'(\mu_0 + \nu_0)^2}{\mu_0(\mu_0^2 - \nu_0^2)};$$

et alors l'expression du temps sera donnée par l'équation

$$t = \sqrt{\mu_0}\int_{\nu_0}^{\nu} \frac{(\mu_0^2 - \nu^2)\,d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{g(\mu_0-\nu)^2 + g'(\mu_0+\nu)^2}}.$$

§ X.

Il est remarquable que cette solution du problème par l'orbite elliptique ou hyperbolique constitue une solution particulière des équations différentielles du mouvement. Ce cas étant certainement digne d'intérêt, il me paraît convenable de montrer qu'on peut déduire de suite les résultats qui précèdent, des équations ordinaires du mouvement.

En se bornant, comme précédemment, au cas du plan, ces équations seront

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g(x+b)}{r^3} - \frac{g'(x-b)}{r'^3},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{gy}{r^3} - \frac{g'y}{r'^3};\end{aligned}\right.$$

et, en faisant

$$x = \frac{\mu\nu}{b}, \quad y = \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b}, \text{ et } \mu = \text{une constante},$$

ces équations se changeront dans celles-ci :

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu\frac{d^2\nu}{dt^2} &= -\frac{g(\mu\nu+b^2)}{(\mu+\nu)^3} - \frac{g'(\mu\nu-b^2)}{(\mu-\nu)^3},\\ \nu\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{b^2}{b^2-\nu^2}\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 &= \frac{g(b^2-\nu^2)}{(\mu+\nu)^3} + \frac{g'(b^2-\nu^2)}{(\mu-\nu)^3},\end{aligned}\right.$$

qui, elles-mêmes, peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu\frac{d^2\nu}{dt^2} = -\frac{g(\mu\nu+b^2)}{(\mu+\nu)^3} - \frac{g'(\mu\nu-b^2)}{(\mu-\nu)^3},\\ &\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = \frac{b^2-\nu^2}{\mu}\left[\frac{g}{(\mu+\nu)^2} + \frac{g'}{(\mu-\nu)^2}\right]; \end{aligned}\right.$$

et il est facile de s'assurer que la première de ces deux équations s'obtient en différentiant la seconde, et, par suite, qu'elle se trouvera vérifiée en même temps qu'elle. On peut donc effectivement supposer μ constant, auquel cas la dernière équation fera connaître l'expression du temps, qui sera la même que celle écrite plus haut. Quant à la vitesse initiale, sa valeur se trouve essentiellement déterminée par les coordonnées à l'origine du mouvement.

Si V désigne toujours cette vitesse initiale, v et v' les deux valeurs qu'elle prend quand on fait successivement $g' = 0$, $g = 0$, on aura

$$V^2 = v^2 + v'^2;$$

d'où résulte ce théorème donné pour la première fois par Legendre :

Soit A *un point d'une ellipse dont* F *et* F′ *sont les deux foyers; soit* v *la vitesse nécessaire pour qu'un point matériel placé en* A *décrive l'ellipse sous l'influence d'une force attractive en raison inverse du carré de la distance émanant du foyer* F; *soit pareillement* v' *la vitesse nécessaire pour que le même point décrive l'ellipse sous l'influence d'une force attractive, en raison inverse du carré de la distance émanant du foyer* F′ : *si ces deux forces attractives agissent à la fois sur le mobile, et que sa vitesse initiale* V *soit telle que l'on ait* $V^2 = v^2 + v'^2$, *il décrira encore la même ellipse.*

Ce théorème n'est, au surplus, qu'un corollaire d'une proposition beaucoup plus générale donnée par M. Bonnet [*].

§ XI.

Dans l'examen du cas particulier que nous venons de faire, nous avons supposé la quantité μ_0 différente de b, et nous sommes parvenu à cette conséquence, que la vitesse initiale du mobile doit avoir une

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome IX, page 113.

valeur convenablement déterminée pour chaque mouvement elliptique; mais on sent que cette condition n'est plus nécessaire dans le cas où $\mu_0 = b$, qui est celui d'un mouvement rectiligne, et que ce mouvement pourra subsister quelle que soit la vitesse initiale : il est d'ailleurs évident que l'analyse du paragraphe précédent ne s'applique pas à ce cas, car les équations (20) ne résultent des équations (19) qu'après la suppression du facteur $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, qui est alors nul; en sorte que la seconde des équations (21) est impropre à représenter le mouvement rectiligne, ce qui, du reste, résulte aussi de ce que cette équation, qui est seulement du premier ordre, ne renferme aucune constante arbitraire. Mais les considérations exposées au § IX nous feront connaître aisément la solution dans ce cas particulier. Nous avons vu que l'équation

$$M = (\mu^2 - b^2)[2C\mu^2 + 2(g + g')\mu - A] = 0$$

doit avoir deux racines égales à b; il suffit donc que l'on ait

$$2Cb^2 + 2(g + g')b - A = 0,$$

et la constante C ne sera assujettie qu'à la seule condition

$$C = \frac{1}{2}V^2 - \frac{g}{b + \nu_0} - \frac{g'}{b - \nu_0};$$

à l'aide des deux équations précédentes, on déterminera les deux constantes A et C, qui seront exprimées à l'aide de la vitesse initiale V, laquelle pourra être prise arbitrairement, et alors le temps sera donné par la formule

$$dt = \frac{\sqrt{b^2 - \nu^2}\, d\nu}{\sqrt{-2C\nu^2 - 2(g - g')\nu + A}}.$$

Ce cas très-simple peut se traiter directement, mais il nous a paru convenable de le déduire de notre analyse.

§ XII.

Enfin, pour compléter cette discussion, il nous reste à indiquer comment on peut déduire de notre solution générale les résultats connus relatifs au mouvement d'un point matériel attiré par un seul centre fixe. Il suffira évidemment de poser $g' = 0$ en même temps que

$K = 0$, et l'on aura pour l'équation de la trajectoire

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(2C\mu^2 + 2g\mu - A)}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)(2C\nu^2 + 2g\nu - A)}};$$

celle-ci est l'équation d'Euler, qui admet, comme on sait, une intégrale algébrique. En formant cette intégrale, on devra retrouver l'équation d'une conique ayant le centre fixe unique pour l'un de ses foyers; et, réciproquement, connaissant l'équation de la conique, on aurait l'intégrale de l'équation précédente: mais on peut obtenir une démonstration mécanique plus simple du théorème d'Euler, ainsi que l'a remarqué M. Jacobi; car si l'on suppose que g est nul en même temps que g' et K, le corps n'étant sollicité par aucune force se mouvra en ligne droite: or on pourra former l'équation de cette ligne droite, entre les deux coordonnées μ et ν. D'ailleurs, en posant, pour abréger,

$$\frac{A}{2C} = e,$$

la même ligne droite sera aussi représentée par l'équation

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - e)}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - e)}};$$

en sorte que l'on aura de suite l'intégrale de cette équation différentielle.

Note de M. Liouville.

La méthode que j'ai employée dans mon premier Mémoire sur le mouvement d'un point matériel, et que M. Serret a suivie dans cette Thèse pour résoudre le problème de la détermination du mouvement d'un point sollicité par deux centres fixes F, F′, ou plutôt par trois centres fixes F, O, F′, équidistants et en ligne droite, avec les lois d'attraction respectives r^{-2}, r, r^{-2}, s'applique non moins facilement au cas où, ces lois restant les mêmes, le centre O demeure seul immobile, tandis que les deux autres F, F′ tournent à l'entour, sur une circonférence de cercle, de manière à se trouver constamment aux deux extrémités du diamètre qui a, dans le plan du cercle, même

longitude que le point matériel soumis à l'action des trois centres, c'est-à-dire aux deux extrémités du diamètre déterminé par la droite OP qui joint le centre O à la projection P (sur le plan du cercle) du point matériel proposé M. Ce cas nouveau et remarquable de l'intégration des équations du mouvement a été déjà traité par une autre méthode dans mon second Mémoire; mais j'ai promis d'y revenir et d'y appliquer la méthode plus élémentaire du premier Mémoire. En remplissant ici ma promesse, je profiterai, pour abréger, des secours que m'offre la Thèse de M. Serret. Les six premiers paragraphes de cette Thèse contiennent, en effet, des résultats généraux que je puis prendre pour point de départ. Ces résultats admis, ainsi que les notations des paragraphes cités, je continue comme on va le voir.

Considérons trois axes de coordonnées rectangulaires dont l'un, celui des z, soit la droite fixe autour de laquelle tourne le plan déterminé par l'angle γ; supposons d'ailleurs que γ soit l'angle du plan mobile avec le plan des xz. Enfin, prenons pour μ et ν les paramètres de deux systèmes d'ellipses et d'hyperboles homofocales situées dans le plan mobile, et résultant de l'intersection, par ce plan, des surfaces (de révolution autour de l'axe des z) représentées par les équations

$$\frac{x^2+y^2}{\mu^2} + \frac{z^2}{\mu^2-b^2} = 1,$$
$$\frac{x^2+y^2}{\nu^2} - \frac{z^2}{b^2-\nu^2} = 1,$$

où b est une constante. En joignant à ces équations celle du plan mobile, qui est

$$y = x \operatorname{tang} \gamma,$$

on trouvera aisément

$$x = \frac{\mu\nu}{b}\cos\gamma, \quad y = \frac{\mu\nu}{b}\sin\gamma, \quad z = \frac{1}{b}\sqrt{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}.$$

Il faudra, bien entendu, donner aux seconds membres des signes convenables, ou, si l'on veut, on fera $\nu = b\cos\theta$, et l'on prendra sans ambiguïté

$$x = \mu\cos\theta\cos\gamma, \quad y = \nu\cos\theta\sin\gamma, \quad z = \sqrt{\mu^2-b^2}\sin\theta.$$

Mais nous aimons mieux conserver la variable ν.

Des valeurs de x, y, z, on déduit, pour $dx^2 + dy^2 + dz^2$ ou ds^2, l'expression suivante :

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{d\nu^2}{b^2 - \nu^2}\right) + \frac{\mu^2\nu^2}{b^2}\,d\gamma^2.$$

On aura, par conséquent, ici

$$m = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \quad n = \frac{1}{b^2 - \nu^2}, \quad \lambda = \mu^2 - \nu^2, \quad \lambda'' = \frac{\mu^2\nu^2}{b^2},$$

et, par suite,

$$\frac{\lambda}{\lambda''} = \frac{b^2}{\nu^2} - \frac{b^2}{\mu^2};$$

en sorte que les quantités λ et λ'' ont bien la forme exigée au § VI. On pourra donc, avec les coordonnées que nous employons, intégrer les équations du mouvement d'un point, toutes les fois que la fonction des forces sera de la forme

$$U = \frac{\psi(\mu) - \Psi(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Il suffira, en effet, de poser dans les formules (14),

$$\varphi(\mu) = \mu^2, \quad \Phi(\nu) = \nu^2, \quad \varpi(\mu) = -\frac{b^2}{\mu^2}, \quad \Pi(\nu) = -\frac{b^2}{\nu^2}.$$

Si donc on prend en particulier

$$\psi(\mu) = g\mu + g'\mu + k\mu^4 - kb^2\mu^2,$$
$$\Psi(\nu) = g\nu - g'\nu + k\nu^4 - kb^2\nu^2,$$

la fonction des forces qui résultera de cette hypothèse, savoir,

$$U = \frac{g}{\mu + \nu} + \frac{g'}{\mu - \nu} + k(\mu^2 + \nu^2 - b^2),$$

satisfera à toutes les conditions que notre méthode d'intégration exige. Mais la valeur de U que je viens d'écrire est précisément celle qui convient au cas de nos trois centres F, O, F' (dont le second seul est immobile), en plaçant le centre O à l'origine fixe des coordonnées x, y, z, et les centres F, F' aux foyers communs des ellipses et des hyperboles (μ), (ν) situées dans le plan mobile et entraînées, pour ainsi

dire, par le point matériel dans son mouvement. Ces foyers sont, à chaque instant, dans le plan des xy, sur la trace du plan mobile et à une distance constante b de l'origine. Il est donc bien clair que ces foyers et l'origine donnent trois points qui peuvent en effet être pris pour nos trois centres d'action. Or, en désignant par r, r', R les distances de ces points F, F', O au point mobile, il vient sans difficulté

$$r = \mu + \nu, \quad r' = \mu - \nu, \quad R^2 = \mu^2 + \nu^2 - b^2.$$

La formule

$$U = \frac{g}{\mu + \nu} + \frac{g'}{\mu - \nu} + k(\mu^2 + \nu^2 - b^2)$$

peut dès lors s'écrire

$$U = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + kR^2,$$

et l'on reconnaîtra sans peine que telle est réellement l'expression de la fonction des forces propre à une combinaison d'actions émanant des centres F, F', O, en raison inverse du carré de la distance pour les deux premiers, et en raison directe de la distance pour le troisième. Il est assez curieux de voir cette expression de la fonction des forces, et par suite l'intégrale des forces vives, se conserver ainsi, dans une question où figurent des centres mobiles, telles qu'elles seraient s'il ne s'agissait que de centres fixes. Cela tient à ce que les déplacements des points F et F' s'effectuent dans des directions toujours perpendiculaires aux droites r, r' correspondantes, en sorte que les variations de ces droites à chaque instant sont les mêmes que si F et F' restaient immobiles. Nous ne croyons pas, au reste, devoir pousser plus loin les détails de la solution du problème que nous nous étions proposé; ce qui précède paraîtra sans doute suffisant.

NOTE

Sur la rectification de la cassinoïde à n *foyers;*

Par M. William ROBERTS.

La rectification de la courbe à laquelle j'ai appliqué cette dénomination peut s'effectuer sous une forme remarquable, entièrement analogue, au reste, à celle que M. Serret a établie pour la cassinoïde ordinaire, et que j'ai étendue depuis au cas de $n = 3$. L'arc aura pour valeur (lorsqu'on en cherche l'expression la plus simple) la somme ou la différence de deux fonctions abéliennes, dans lesquelles le polynôme affecté du signe radical ne monte qu'au degré $n + 1$.

Observons d'abord que, l'équation de notre courbe étant

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n},$$

l'expression de l'arc s en fonction du rayon vecteur sera

$$2b^n \int \frac{r^n\, dr}{\sqrt{-r^{4n} + 2(b^{2n} + a^{2n})r^{2n} - (b^{2n} - a^{2n})^2}}$$

(*voir* un article de M. Serret, tome VIII de ce Journal, page 501).

Il est important de remarquer que cette formule, étant appliquée aux deux cas de $a > b$ et de $a < b$, conduira évidemment aux mêmes résultats analytiques, quoique la courbe change tout à fait de caractère géométrique, comme l'on sait, en passant de l'un de ces cas à l'autre. Supposons, pour fixer les idées, que $a < b$, et faisons

$$r = (b^{2n} - a^{2n})^{\frac{1}{2n}} x,$$

ce qui nous donnera

$$s = \frac{2b^n}{(b^{2n} - a^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}} \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{-x^{4n} + \frac{2(b^{2n} + a^{2n})}{b^{2n} - a^{2n}} x^{2n} - 1}}.$$

En posant, pour abréger,

$$\alpha = \frac{2(b^{2n} + a^{2n})}{b^{2n} - a^{2n}},$$

l'intégrale qui figure dans cette formule peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha - \left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right)}};$$

et en faisant $x + \frac{1}{x} = z$, ce qui donne

$$dx = \frac{\sqrt{z^2 - 4} \pm z}{2\sqrt{z^2 - 4}}\, dz,$$

et

$$x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}} = z^{2n} - 2nz^{2n-2} + \frac{2n.2n-3}{1.2} z^{2n-4} - \frac{2n.2n-3.2n-5}{1.2.3} z^{2n-6} + \ldots,$$

elle deviendra

$$\int \frac{\sqrt{z^2-4} \pm z}{2\sqrt{z^2-4}} \left[\frac{dz}{\sqrt{\alpha - (z^{2n} - 2nz^{2n-2} + \ldots)}}\right].$$

Par conséquent, en prenant positivement les différentielles des deux arcs s_1, s_2 qui répondent au double signe, on trouvera facilement, pour leur somme et leur différence,

$$s_1 + s_2 = \frac{2b^n}{(b^{2n} - a^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}} \int \frac{z\, dz}{\sqrt{z^2-4}\sqrt{\alpha - (z^{2n} - 2nz^{2n-2} + \ldots)}},$$

$$s_1 - s_2 = \frac{2b^n}{(b^{2n} - a^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha - (z^{2n} - 2nz^{2n-2} + \ldots)}}.$$

Maintenant dans la première de ces expressions, soit $z^2 - 4 = 4\xi$, et dans la seconde, soit $z^2 = 4\eta$, et l'on aura sans peine

$$s_1 + s_2 = \frac{2b^n}{(b^{2n} - a^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{A_1\xi^{n+1} + A_2\xi^n + \ldots + A_n\xi^2 + A_{n+1}\xi}},$$

$$s_1 - s_2 = \frac{2b^n}{(b^{2n} - a^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}} \int \frac{d\eta}{\sqrt{B_1\eta^{n+1} + B_2\eta^n + \ldots + B_n\eta^2 + B_{n+1}\eta}},$$

où les coefficients $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ peuvent être calculés très-facilement, ce qui renferme la réduction énoncée.

Je remarquerai enfin que l'arc admet aussi l'expression

$$b^n \int \frac{d\theta}{(a^{2n} \pm 2a^n b^n \sin n\theta + b^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}},$$

θ étant le paramètre du système orthogonal conjugué à celui qu'on obtiendrait en faisant varier b. Si l'on fait successivement $n = 2$ et $n = 3$, on retombera sur les réductions qui se trouvent au tome I du *Traité des fonctions elliptiques*, pages 178, 180, et qui se présentent ici comme des cas particuliers d'un théorème général. J'ignore si cette transformation avait été déjà indiquée; il me semble au moins que le rapprochement qui la fait découler de considérations géométriques n'est pas dépourvu d'intérêt.

THÈSE

SUR LES BRACHYSTOCHRONES;

PAR M. ROGER,
Élève Ingénieur des Mines.

Le problème des brachystochrones a été autrefois l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres, parmi lesquels nous citerons Jean Bernoulli et Euler. En prenant ce problème pour sujet de thèse, nous avons dû naturellement reproduire beaucoup de résultats connus; mais nous pensons du moins avoir présenté quelques détails nouveaux, quant à ce qui concerne les brachystochrones sur une surface donnée.

I.

Des brachystochrones dans le cas de la pesanteur.

1. Le point mobile peut être libre ou assujetti à se mouvoir sur une surface donnée.

Dans le premier cas, la brachystochrone (que nous nommerons alors *brachystochrone absolue*) est, de toutes les courbes que l'on peut faire suivre au mobile pour qu'il se transporte (sous l'influence de la pesanteur d'un point de l'espace à un autre point, la courbe pour laquelle le temps total du mouvement est un minimum.

Dans le second cas, le temps de la descente sur la brachystochrone est simplement un minimum relativement au temps que mettrait le mobile à descendre sur une autre courbe tracée aussi sur la surface donnée.

Dans les deux cas, le point de départ et le point d'arrivée peuvent être ou donnés de position, ou seulement assujettis à se trouver sur

des courbes ou des surfaces déterminées; nous les supposerons toujours par la suite donnés de position.

Considérons d'abord le cas où le mobile est libre.

On aura pour la vitesse de ce mobile à un instant quelconque,

$$v \text{ ou } \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(z - z_0)},$$

z_0 étant l'ordonnée du point de départ; et l'intégrale qu'il faudra rendre un minimum sera la suivante :

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{ds}{\sqrt{2g(z - z_0)}}.$$

En appliquant les règles du calcul des variations, on arrive sans peine aux deux équations

$$\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} = C, \quad \frac{dy}{ds\sqrt{z - z_0}} = C_1;$$

d'où l'on déduit une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = a,$$

équation d'un plan vertical. Le mobile devra donc se mouvoir dans le plan vertical qui passe par le point de départ et le point d'arrivée; la brachystochrone sera donc la même courbe que si le mobile était assujetti à rester sur un plan vertical donné, cas que nous examinons ci-après (nº **2**).

Supposons, en second lieu, que le mobile doive rester sur une surface, dont nous représenterons l'équation par

$$\text{(A)} \qquad F(x, y, z) = 0;$$

cette équation sera l'une des équations de la brachystochrone. La seconde équation, donnée sans difficulté par le calcul des variations, est la suivante :

$$\text{(B)} \qquad \frac{d\,\dfrac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}}}{\dfrac{dF}{dx}} = \frac{d\,\dfrac{dy}{ds\sqrt{z - z_0}}}{\dfrac{dF}{dy}}.$$

Au moyen de l'équation (A) on pourra réduire l'équation (B) à une équation différentielle du second ordre entre deux variables. L'intégrale de cette équation du second ordre contiendra deux constantes arbitraires qui permettront de se donner arbitrairement le point de départ et le point d'arrivée.

Je vais maintenant étudier les propriétés des brachystochrones considérées sur certaines surfaces en particulier.

Cas où la surface donnée est un plan vertical.

2. Nous prendrons ce plan pour plan des xz; son équation sera donc $y = 0$; et, par suite, on aura

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 1.$$

L'équation (B) nous donnera donc

$$d\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} = 0,$$

d'où

$$\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} = \text{constante}; \tag{1}$$

ce qui est l'équation différentielle de la cycloïde.

3. Je n'ai pas à examiner ici les propriétés géométriques de la brachystochrone, qui sont celles de de la cycloïde; j'indiquerai seulement quelques propriétés en quelque sorte *mécaniques,* fournies par la considération de son équation différentielle.

1°. *La brachystochrone est, au point de départ, tangente à la verticale.*

En effet, si l'on fait $z = z_0$, on a $\frac{dx}{ds} = 0$, et, par suite, $\frac{dx}{dz} = 0$.

2°. *La vitesse du mobile, en un point quelconque, est égale à la projection sur la tangente en ce point, de la vitesse au point le plus bas.*

En effet, si l'on remarque que la vitesse, à chaque instant, est

donnée par la formule

$$v = \sqrt{2g(z - z_0)},$$

et que l'angle de la tangente avec l'horizontale a pour cosinus

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds},$$

l'équation (1) donnera

$$\frac{\cos\alpha}{v} = \text{constante} = \frac{1}{V},$$

d'où

$$v = V\cos\alpha.$$

Or on voit par cette équation que V n'est autre chose que la valeur de v pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire au point où la tangente est horizontale; ce qui démontre le théorème énoncé.

3°. *Lorsque le point de départ et le point d'arrivée sont sur la même verticale, la brachystochrone n'est autre chose que cette verticale.*

En effet, l'équation différentielle (1) donne

$$dx = Cds\sqrt{z - z_0}.$$

Le point de départ et celui d'arrivée étant sur la même verticale, leur abscisse est la même; il faudra donc que la somme des accroissements du second membre, c'est-à-dire l'intégrale $C\int_{z_0}^{z_1} ds\sqrt{z - z_0}$, soit nulle, ce qui ne peut avoir lieu qu'en faisant $C = 0$. L'intégrale de l'équation ci-dessus est alors simplement

$$x = x_0 = x_1,$$

équation de la verticale qui contient à la fois le point de départ et le point d'arrivée.

4. Déterminons maintenant pour chaque instant t la position du mobile sur la brachystochrone. En mettant l'origine des coordonnées au point de départ, nous aurons pour cela les trois équations

$$x = r(u - \sin u),\quad z = r(1 - \cos u),\quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gz},$$

dont les deux premières sont celles de la cycloïde. Ces deux équations donnent

$$ds = du\sqrt{2rz};$$

la troisième deviendra donc

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{2gz}}{\sqrt{2rz}} = \sqrt{\frac{g}{r}},$$

d'où

$$u = t\sqrt{\frac{g}{r}},$$

en supposant que le temps soit compté à partir de l'origine du mouvement.

La loi du mouvement sera donc donnée par les deux équations

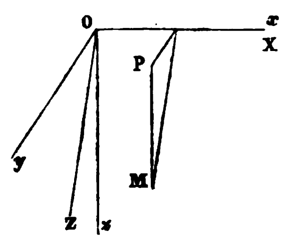
$$x = r\left(t\sqrt{\frac{g}{r}} - \sin t\sqrt{\frac{g}{r}}\right),$$

$$z = r\left(1 - \cos t\sqrt{\frac{g}{r}}\right).$$

Ces équations montrent que le mouvement du point sera le même que si ce point était sur un cercle de rayon r, roulant sur une droite horizontale, avec une vitesse constante convenable.

Cas où la surface donnée est un plan incliné.

5. Nous rapporterons la courbe cherchée à l'ancien axe Ox ou OX, supposé placé dans le plan incliné, et à un nouvel axe OZ qui sera la ligne de plus grande pente de ce plan.



Soit θ l'angle du plan incliné avec le plan horizontal. L'équation

de ce plan, savoir,

$$(1) \qquad F(x, y, z) = z - y \tan \theta = 0,$$

donnera

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = -\tan \theta.$$

L'équation (1) est la première des équations de la brachystochrone, et la seconde sera

$$d \frac{dx}{ds \sqrt{z - z_0}} = 0,$$

d'où

$$\frac{dx}{ds \sqrt{z - z_0}} = C.$$

D'ailleurs, les formules de transformation propres à passer du système (x, y, z) au système (X, Z) sont

$$x = X, \quad y = Z \cos \theta, \quad z = Z \sin \theta,$$

et l'équation de la même courbe, dans le système (X, Z), sera

$$\frac{dX}{dS \sqrt{Z - Z_0}} = C_1.$$

Cette équation montre que la courbe suivie par le mobile doit être toujours la même dans le plan incliné, quelle que soit la position de ce plan autour de l'horizontale Ox, pourvu que les points de départ et d'arrivée gardent relativement la même position. Il est, du reste, évident *à priori* qu'il doit en être ainsi. Car on peut décomposer la pesanteur qui agit à chaque instant sur le mobile dans la direction de la verticale, en deux forces, l'une normale au plan incliné et qui n'aura aucune influence sur le mouvement du point, l'autre suivant la ligne de plus grande pente et qui sera représentée par $g \sin \theta$. On pourra donc regarder le mobile comme étant soumis à chaque instant à une force constante en grandeur, et constamment parallèle à la même direction (celle des lignes de plus grande pente); ce qui ramène le cas du plan incliné à celui d'un plan vertical quelconque.

On peut remarquer que si le point de départ et celui d'arrivée se trouvent sur une ligne de plus grande pente, la brachystochrone, d'après ce qui a été établi au n° 3, n'est autre chose que cette ligne de plus grande pente elle-même.

Cas des surfaces de révolution.

6. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que la surface est de révolution autour d'un axe vertical.

L'équation générale de ces sortes de surfaces,

$$x^2 + y^2 = \varphi(z), \tag{1}$$

donnera

$$\frac{dF}{dx} = 2x, \quad \frac{dF}{dy} = 2y;$$

et, par suite, on aura, pour la seconde des équations de la brachystochrone,

$$\frac{d\dfrac{dx}{ds\sqrt{z-z_0}}}{x} = \frac{d\dfrac{dy}{ds\sqrt{z-z_0}}}{y},$$

d'où

$$yd\frac{dx}{ds\sqrt{z-z_0}} - xd\frac{dy}{ds\sqrt{z-z_0}} = 0,$$

et en intégrant,

$$ydx - xdy = Cds\sqrt{z-z_0}. \tag{2}$$

On peut interpréter géométriquement cette équation différentielle du premier ordre; en effet, si l'on adopte dans le plan des xy des coordonnées polaires; qu'on appelle r le rayon vecteur de la projection M, θ l'angle que ce rayon OM fait avec l'axe des z, on sait que l'on aura

$$ydx - xdy = r^2 d\theta.$$

De plus, on a pour la vitesse du mobile à chaque instant,

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(z-z_0)};$$

l'équation (2) pourra donc se mettre sous la forme

$$(3) \qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = Av^2, \quad \text{d'où} \quad r^2 d\theta = Av^2 dt.$$

Ainsi, *l'aire décrite à chaque instant par la projection du rayon vecteur est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile.*

Dans le cas du cylindre circulaire, que nous examinerons spécialement ci-après, le rayon r est constant. D'ailleurs, $\frac{d\theta}{dt}$ représente la vitesse angulaire de la projection du rayon vecteur; par conséquent:

Lorsqu'un point matériel descend sur un cylindre circulaire, en suivant une brachystochrone, la vitesse angulaire de la projection du rayon vecteur est proportionnelle au carré de la vitesse effective du mobile.

A l'origine du mouvement, la vitesse v est supposée nulle; $\frac{d\theta}{dt}$ est donc nulle, en vertu de l'équation (3), pour une surface de révolution quelconque; par conséquent, le mobile reste, pendant le premier instant, dans le plan vertical qui passe par le rayon vecteur. Ainsi:

Toute brachystochrone sur une surface de révolution est tangente au méridien qui passe par le point de départ.

L'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad d\frac{x}{y} = Cy^2 ds \sqrt{z - z_0},$$

et l'on voit que le second membre a toujours le même signe: il est positif ou négatif suivant le signe de C.

Cela posé, supposons que le point d'arrivée $(x_1 y_1 z_1)$ soit sur le méridien du point de départ $(x_0 y_0 z_0)$, on aura

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_0}{y_0};$$

il faudra donc que la somme des accroissements du rapport $\frac{x}{y}$ soit nulle, c'est-à-dire que

$$C\int_{z_0}^{z_1} y^2 ds \sqrt{z - z_0} = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que C = o. Alors l'équation (4) se réduit à

$$d\frac{x}{y} = 0,$$

d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0} = \frac{x_1}{y_1},$$

équation du méridien qui passe à la fois par le point de départ et le point d'arrivée.

Ainsi, *quand le point de départ et le point d'arrivée sont situés sur un même méridien, la brachystochrone entre ces deux points n'est autre chose que ce méridien lui-même.*

7. L'équation générale des brachystochrones sur une surface de révolution,

$$(1) \qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = Av^2,$$

peut être intégrée dans tous les cas. Car on en tire

$$r^2\, d\theta = A ds\, \sqrt{z - z_0}.$$

On a d'ailleurs

$$r = F(z), \quad dr = F'(z)\, dz,$$

et

$$ds = \sqrt{dz^2 + dr^2 + r^2\, d\theta^2} = \sqrt{dz^2 [1 + F'(z)^2] + F(z)^2\, d\theta^2};$$

l'équation (1) pourra donc se mettre sous la forme

$$F(z)^4\, d\theta^2 = A^2 (z - z_0) \left\{ dz^2 [1 + F'(z)^2] + d\theta^2\, F(z)^2 \right\},$$

d'où

$$d\theta = \frac{Adz}{F(z)} \sqrt{\frac{[1 + F'(z)^2](z - z_0)}{F(z)^2 - A^2 (z - z_0)}}:$$

d'où l'intégrale

$$\theta - \theta_0 = A \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{F(z)} \sqrt{\frac{[1 + F'(z)^2](z - z_0)}{F(z)^2 - A^2 (z - z_0)}}.$$

Cas du cylindre circulaire droit, à axe vertical.

8. En faisant, dans la formule que nous venons d'établir,

$$F(z) = \text{constante} = a,$$

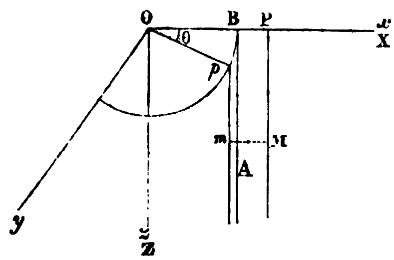
il serait aisé d'achever l'intégration indiquée, et l'on aurait l'équation de la brachystochrone sur le cylindre circulaire droit à axe vertical; mais nous préférons y arriver au moyen du théorème suivant que nous allons d'abord démontrer :

Si l'on développe le cylindre donné sur un plan vertical, autour de la verticale qui passe par le point de départ, et qu'on trace sur ce plan vertical la brachystochrone passant par les deux points donnés, cette courbe, en enroulant le plan sur le cylindre, deviendra la brachystochrone cherchée.

Pour le démontrer, remontons aux équations de la brachystochrone sur le cylindre,

$$\left\{\begin{array}{l} y\dfrac{dx}{ds\sqrt{z-z_0}} - x\dfrac{dy}{ds\sqrt{z-z_0}} = C, \\ \text{avec} \\ \qquad x^2 + y^2 = a^2, \end{array}\right.$$

et cherchons l'équation en (X, Z) de la transformée de cette courbe, en supposant qu'on développe le cylindre sur le plan des XZ, de part et d'autre de l'arête AB qui passe par le point de départ B.



Soit $m(x, y, z)$ un point quelconque du cylindre; ce point prendra une position telle que M (X, Z), et l'on aura, entre les coordonnées des points m et M, les relations suivantes :

$$z = Z, \quad x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad X = a(1+\theta),$$

θ pouvant avoir toutes les valeurs comprises entre o et + 180 degrés et o et — 180 degrés. De là on déduit

$$x = a \cos \frac{X - a}{a}, \quad y = a \sin \frac{X - a}{a},$$

et

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dX^2 + dZ^2} = dS;$$

l'équation de la transformée sera donc

$$a \left(\sin^2 \frac{X - a}{a} + \cos^2 \frac{X - a}{a}\right) \frac{dX}{dS \sqrt{Z - Z_0}} = \text{constante},$$

ou simplement,

$$\frac{dX}{dS \sqrt{Z - Z_0}} = \text{constante}.$$

La transformée n'est donc autre chose que la brachystochrone entre les nouvelles positions des deux points donnés sur le cylindre; et de là, réciproquement, résulte le théorème énoncé.

Ce théorème peut aussi être démontré synthétiquement de la manière suivante.

Imaginons qu'on ait tracé une courbe quelconque sur le cylindre; cette courbe se transformera, par le développement du cylindre, en une courbe *isochrone,* c'est-à-dire qu'un point matériel mettrait, à descendre d'un point à un autre de la courbe cylindrique, le même temps qu'il mettrait, sur la transformée, à parcourir l'espace compris entre les deux points correspondants.

En effet, si l'on partage en éléments égaux la courbe cylindrique et sa transformée, on voit bien que l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} \frac{ds}{\sqrt{2g(z - z_0)}}$ aura exactement la même valeur, parce que, dans le développement du cylindre, les éléments (ds) conservent la même grandeur, et les points correspondants gardent la même hauteur (z). Or cette intégrale représente le temps total de la descente; ce temps est donc le même pour la courbe cylindrique et pour sa transformée.

De là il résulte évidemment que la courbe cylindrique pour laquelle

le temps de la descente est minimum donnera une transformée jouissant de la même propriété; et réciproquement.

Les formules de transformation propres au développement du cylindre permettent d'obtenir, au moyen du théorème précédent, et des équations connues de la cycloïde, les équations de la brachystochrone cylindrique en coordonnées (x, y, z).

On a, pour les équations de la cycloïde,

$$Z = r(1 - \cos u), \quad X = r(u - \sin u).$$

D'ailleurs, on a

$$X = a(1 + \theta), \quad Z = z, \quad x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta;$$

éliminant Z et X, on aura

$$\left\{\begin{aligned} z &= r(1 - \cos u), \\ a(1 + \theta) &= r(u - \sin u), \\ x &= a\cos\theta, \\ y &= a\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

II.

Des brachystochrones en général.

9. Supposons qu'un point mobile soit soumis à l'action d'un système donné de forces variables avec la position du mobile; parmi toutes les courbes assujetties ou non à se trouver sur une surface donnée, que le mobile pourra suivre pour se rendre d'un point de l'espace à un autre point, la brachystochrone sera la courbe pour laquelle le temps total du mouvement sera moindre que pour toutes les courbes voisines.

S'il existe une certaine fonction $\varphi(x, y, z)$ dont les forces appliquées (X, Y, Z) soient les dérivées respectivement par rapport à x, y et z, on sait, par le principe des forces vives, que l'on aura

$$X = v\frac{dv}{dx}, \quad Y = v\frac{dv}{dy}, \quad Z = v\frac{dv}{dz}.$$

C'est seulement ce cas que nous considérerons dans tout ce qui va suivre.

On a toujours

$$v = \frac{ds}{dt},$$

et, par suite,

$$dt = \frac{ds}{v}.$$

Il faut donc rendre minimum la valeur de l'intégrale $\int \frac{ds}{v}$, considérée depuis le point de départ jusqu'au point d'arrivée.

Le calcul des variations conduit sans difficulté aux équations différentielles de la brachystochrone; à savoir, si le point est tout à fait libre,

$$\left\{\begin{aligned} &ds\,\frac{d\frac{1}{v}}{dx} - d\,\frac{dx}{vds} = 0,\\ &ds\,\frac{d\frac{1}{v}}{dx} - d\,\frac{dy}{vds} = 0,\end{aligned}\right.$$

et, s'il est assujetti à se mouvoir sur une surface,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{ds\,\dfrac{d\frac{1}{v}}{dx} - d\,\dfrac{dx}{vds}}{\dfrac{dF}{dx}} = \frac{ds\,\dfrac{d\frac{1}{v}}{dy} - d\,\dfrac{dy}{vds}}{\dfrac{dF}{dy}},\\ &F(x, y, z) = 0.\end{aligned}\right.$$

Dans les deux cas, le mouvement du point sera entièrement déterminé en joignant aux équations précédentes la relation qui résulte du principe des forces vives, et que nous écrirons ainsi :

$$v = f(x, y, z).$$

10. Considérons d'abord le cas où le point est libre. On aura,

dans ce cas, pour les équations de la *brachystochrone absolue*,

$$\left\{\begin{aligned} v &= f(x, y, z), \\ \frac{d\frac{1}{v}}{dx} &= \frac{d\frac{dx}{vds}}{ds}, \\ \frac{d\frac{1}{v}}{dy} &= \frac{d\frac{dy}{vds}}{ds}. \end{aligned}\right.$$

A ces équations on peut joindre celle-ci :

$$\frac{d\frac{1}{v}}{dz} = \frac{d\frac{dz}{vds}}{ds}.$$

En effet, en multipliant ces trois dernières équations respectivement par dx, dy, dz, et ajoutant les produits, on a

$$\begin{aligned} d\frac{1}{v} &= \frac{dxd\frac{dx}{vds} + dyd\frac{dy}{vds} + dzd\frac{dz}{vds}}{ds} \\ &= \frac{\frac{1}{vds}(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) + d\frac{1}{vds}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{ds} \\ &= \frac{\frac{1}{vds}dsd^2s + ds^2d\frac{1}{vds}}{ds} = \frac{1}{vds}d^2s + dsd\frac{1}{vds} \\ &= d\left(\frac{1}{vds}ds\right) = d\frac{1}{v}, \end{aligned}$$

équation identique : la troisième des équations ci-dessus peut donc être regardée comme une conséquence des deux autres.

11. Convenons de nommer *lignes de plus grande pente absolues* les courbes dont la tangente en chaque point est perpendiculaire à la surface de niveau $v =$ constante, qui passe par ce point, ou, si l'on veut, l'enveloppe des directions successives de la force appliquée en chaque point.

Une pareille courbe aura pour équations

$$(1) \qquad \frac{dx}{\frac{dv}{dx}} = \frac{dy}{\frac{dv}{dy}} = \frac{dz}{\frac{dv}{dz}}.$$

Cela posé, je dis que, si la vitesse initiale est nulle, la brachystochrone absolue est, en son point de départ, tangente à la ligne de plus grande pente absolue.

En effet, les équations de la brachystochrone donnent

$$\frac{d\frac{dx}{vds}}{\frac{d\frac{1}{v}}{dx}} = \frac{d\frac{dy}{vds}}{\frac{d\frac{1}{v}}{dy}} = \frac{d\frac{dz}{vds}}{\frac{d\frac{1}{v}}{dz}},$$

ou bien

$$\frac{dv\frac{dx}{ds} - vd\frac{dx}{ds}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{dvd\frac{dy}{ds} - dvd\frac{dy}{ds}}{\frac{dv}{dy}} = \frac{dvd\frac{dz}{ds} - vd\frac{dz}{ds}}{\frac{dv}{dz}},$$

équations qui, pour $v = 0$, donnent, pour le premier élément de la brachystochrone, la même direction que celle assignée par les équations (1) pour l'élément de la ligne de plus grande pente absolue.

12. Considérons maintenant le cas où le mobile se trouve toujours sur une surface

$$F(x, y, z) = 0.$$

Alors, les équations de la brachystochrone peuvent être mises sous la forme d'une équation à trois membres parfaitement symétriques,

$$(1) \qquad \frac{\frac{d\frac{1}{v}}{dx} - \frac{d\frac{dx}{vds}}{ds}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{\frac{d\frac{1}{v}}{dy} - \frac{d\frac{dy}{vds}}{ds}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{\frac{d\frac{1}{v}}{dz} - \frac{d\frac{dz}{vds}}{ds}}{\frac{dF}{dz}}.$$

Pour le prouver, écrivons cette équation comme il suit :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\frac{1}{v}}{dx} - \frac{d\frac{dx}{vds}}{ds} &= \chi\frac{dF}{dx},\\
\frac{d\frac{1}{v}}{dy} - \frac{d\frac{dy}{vds}}{ds} &= \chi\frac{dF}{dy},\\
\frac{d\frac{1}{v}}{dz} - \frac{d\frac{dz}{vds}}{ds} &= \chi\frac{dF}{dz};
\end{aligned}\right.$$

il suffira de faire voir que ces trois équations se réduisent à deux équations distinctes.

Ajoutons ces équations membre à membre, après les avoir respectivement multipliées par dx, dy, dz; il viendra, en remarquant que $F(x, y, z) = 0$, que, par suite, $\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0$, et que $\frac{d\frac{1}{v}}{dx}dx + \frac{d\frac{1}{v}}{dy}dy + \frac{d\frac{1}{v}}{dz}dz = d\frac{1}{v}$,

$$\begin{aligned}
d\frac{1}{v} &= \frac{dxd\frac{dx}{vds} + dyd\frac{dy}{vds} + dzd\frac{dz}{vds}}{ds}\\
&= \frac{\frac{1}{vds}(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) + (dx^2 + dy^2 + dz^2)\,d\frac{1}{vds}}{ds}\\
&= \frac{\frac{1}{vds}dsd^2s + ds^2d\frac{1}{vds}}{ds} = \frac{1}{vds}d^2s + dsd\frac{1}{vds}\\
&= d\left(\frac{1}{vds}ds\right) = d\frac{1}{v}.
\end{aligned}$$

On voit donc que l'une quelconque des trois équations ci-dessus pourrait se déduire des deux autres.

Ainsi, l'on pourra, suivant les cas particuliers que l'on aura à considérer, adopter pour les équations de la brachystochrone avec

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad v = f(x, y, z),$$

l'une quelconque des trois équations que fournit l'équation à trois membres ci-dessus.

On peut déduire de ce qui précède les équations générales de la brachystochrone absolue; en effet, il est évident, par la nature même de la brachystochrone absolue, que cette courbe est aussi une brachystochrone sur toute surface $F = 0$ qui la contiendrait. Par conséquent, l'équation (1) doit être satisfaite pour un point quelconque de la brachystochrone absolue, quels que soient $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$; ce qui ne peut avoir lieu que si les trois numérateurs sont simultanément nuls, ou, ce qui revient au même, si $\chi = 0$. On retombe ainsi sur les équations trouvées directement au n° **10**.

13 Supposons d'abord que le mobile ait reçu une certaine vitesse initiale, et qu'il ne soit ensuite soumis à l'action d'aucune force; la brachystochrone se réduira à la ligne géodésique, laquelle sera représentée par les équations :

$$\left\{\begin{aligned} &F(x, y, z) = 0,\\ &\frac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{dF}{dz}}, \end{aligned}\right.$$

qu'il est aisé, du reste, de trouver directement.

14. On arrive encore aux équations de la ligne géodésique en supposant que le mobile est assujetti à rester sur une des surfaces de niveau $v =$ constante; car on aura

$$\frac{\frac{d\frac{1}{v}}{dx} - \frac{d\frac{dx}{vds}}{ds}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - \frac{d\frac{dx}{vds}}{ds}}{\frac{dv}{dx}} = -\frac{1}{v^2} - \frac{\frac{d\frac{dx}{vds}}{ds}}{\frac{dv}{dx}}.$$

Et comme le terme $-\frac{1}{v^2}$ sera commun aux trois membres de l'équation de la brachystochrone, cette équation deviendra

$$\frac{d\frac{dx}{vds}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{d\frac{dy}{vds}}{\frac{dv}{dy}} = \frac{d\frac{dz}{vds}}{\frac{dv}{dz}};$$

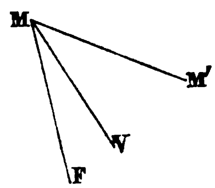
et comme v doit être regardé comme constant dans les différentielles totales indiquées ci-dessus, l'équation prendra la forme

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{dv}{dy}} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{dv}{dz}},$$

équation de la géodésique sur la surface $v(x, y, z) =$ constante.

15. Convenons de nommer *lignes de plus grande pente* sur la surface $F(x, y, z) = 0$ les lignes de cette surface dont la tangente en chaque point fait le plus petit angle possible avec la normale à la surface de niveau qui passe par ce point, ou, ce qui revient au même, la ligne qui est, en chaque point, perpendiculaire à la courbe de niveau correspondante; ou encore l'enveloppe des projections sur la surface de la direction de la force en chaque point.

Soient $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha'\beta'\gamma')$, $(\alpha''\beta''\gamma'')$ les angles formés respectivement avec les axes par les directions MV de la normale à la surface de niveau, MM' de la ligne de plus grande pente, MF de la normale à la surface donnée. Soient, de plus, μ et μ' les angles que MV fait



respectivement avec MM' et MF; le caractère géométrique de la direction MM' sur la surface donnée sera

$$\mu + \mu' = \frac{\pi}{2}.$$

Cela posé, je dis que *la brachystochrone est en son point de départ,* ou plus généralement, *aux points où la vitesse du mobile se trouvera nulle, tangente à la ligne de plus grande pente.*

Et d'abord, en remarquant que l'on a

$$d\frac{dx}{vds} - ds\frac{d\frac{1}{v}}{dx} = -\frac{dv}{v^2}\frac{dx}{ds} + \frac{1}{v}d\frac{dx}{ds} + ds\frac{\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

les équations de la brachystochrone pourront se mettre sous la forme

$$\chi = \frac{-\frac{dx}{ds}\frac{dv}{ds} + v\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dv}{dx}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{-\frac{dy}{ds}\frac{dv}{ds} + v\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{dv}{dy}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{-\frac{dz}{ds}\frac{dv}{ds} + v\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} + \frac{dv}{dz}}{\frac{dF}{dz}};$$

et l'on voit que, pour les points où la vitesse sera nulle, la direction de la tangente sera déterminée par des équations de la forme

$$(1) \qquad \chi_0 = \frac{\frac{dv}{dx} - \frac{dx}{ds}\frac{dv}{ds}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{\frac{dv}{dy} - \frac{dy}{ds}\frac{dv}{ds}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{\frac{dv}{dz} - \frac{dz}{ds}\frac{dv}{ds}}{\frac{dF}{dz}}.$$

Or je vais démontrer que ce sont là précisément les équations générales des lignes de plus grande pente.

En effet, si nous posons

$$V = \sqrt{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2}$$

et

$$V_1 = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2},$$

nous aurons

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dv}{dx}}{V}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{dv}{dy}}{V}, \quad \cos\gamma = \frac{\frac{dv}{dz}}{V},$$

$$\cos\alpha' = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta' = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma' = \frac{dz}{ds},$$

$$\cos\alpha'' = \frac{\frac{dF}{dx}}{V_1}, \quad \cos\beta'' = \frac{\frac{dF}{dy}}{V_1}, \quad \cos\gamma'' = \frac{\frac{dF}{dz}}{V_1},$$

et enfin

$$\cos\mu = \frac{\frac{dv}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{ds}}{V} = \frac{\frac{dv}{ds}}{V}.$$

Alors les équations (1) deviendront

$$\chi_0 = \frac{\cos\alpha - \cos\mu\cos\alpha'}{\cos\alpha''} = \frac{\cos\beta - \cos\mu\cos\beta'}{\cos\beta''} = \frac{\cos\gamma - \cos\mu\cos\gamma'}{\cos\gamma''}.$$

De là on déduit

$$\chi_0 = \frac{\sqrt{(\cos\alpha - \cos\mu\cos\alpha')^2 + (\cos\beta - \cos\mu\cos\beta')^2 + (\cos\gamma - \cos\mu\cos\gamma')^2}}{\sqrt{\cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma''}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \cos^2\mu - 2\cos^2\mu}}{1} = \sin\mu;$$

mais on a aussi

$$\chi_0 = \frac{(\cos\alpha - \cos\mu\cos\alpha')\cos\alpha + (\cos\beta - \cos\mu\cos\beta')\cos\beta + (\cos\gamma - \cos\mu\cos\gamma')\cos\gamma}{\cos\alpha''\cos\alpha + \cos\beta''\cos\beta + \cos\gamma''\cos\gamma}$$

$$= \frac{1 - \cos^2\mu}{\cos\mu'} = \frac{\sin^2\mu}{\cos\mu'} = \sin\mu\frac{\sin\mu}{\cos\mu'}.$$

En rapprochant l'une de l'autre ces deux valeurs de la même fonction χ_0, on en conclut

$$\sin\mu = \cos\mu',$$

et, par suite,

$$\mu + \mu' = \frac{\pi}{2},$$

ce qui est la propriété caractéristique des lignes de plus grande pente.

Les équations (1) peuvent donc être regardées comme les équations des lignes de plus grande pente; et, par suite, on voit que la brachystochrone est tangente à la ligne de plus grande pente qui passe par le point où la vitesse du mobile est nulle.

16. Les équations générales des brachystochrones peuvent, d'après ce qui précède, être mises sous la forme

$$\frac{vd\frac{dx}{ds}}{\frac{dF}{dx}} + \frac{\frac{dv}{dx} - \frac{dx}{ds}\frac{dv}{ds}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{vd\frac{dy}{ds}}{\frac{dF}{dy}} + \frac{\frac{dv}{dy} - \frac{dy}{ds}\frac{dv}{ds}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{vd\frac{dz}{ds}}{\frac{dF}{dz}} + \frac{\frac{dv}{dz} - \frac{dz}{ds}\frac{dv}{ds}}{\frac{dF}{dz}};$$

et l'on voit que l'on aura satisfait à ces équations si l'on a en même

temps

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d\dfrac{dx}{ds}}{\dfrac{dF}{dx}}=\dfrac{d\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dF}{dy}}=\dfrac{d\dfrac{dz}{ds}}{\dfrac{dF}{dz}},\\ \text{et}\\ \dfrac{\dfrac{dv}{dx}-\dfrac{dx}{ds}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{dF}{dx}}=\dfrac{\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{dy}{ds}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{dF}{dy}}=\dfrac{\dfrac{dv}{dz}-\dfrac{dz}{ds}\dfrac{dv}{ds}}{\dfrac{dF}{dz}};\end{array}\right.$$

c'est-à-dire qu'une courbe qui, sur une surface donnée, pourra être à la fois ligne géodésique et ligne de plus grande pente, sera, par suite, une brachystochrone.

Ou, plus généralement, en considérant les lignes géodésiques, les brachystochrones et les lignes de plus grande pente sur une surface, on voit qu'une ligne qui jouirait des propriétés des courbes appartenant à deux de ces genres, jouirait aussi des propriétés des courbes du troisième genre.

Tels sont, dans le cas de la pesanteur, les méridiens sur une surface de révolution; les arêtes d'un cylindre droit quelconque, etc. (nos **3**, **5**, **6**).

17. *La résultante* N *des forces appliquées, estimée suivant la direction du rayon de courbure, est égale, en grandeur absolue, dans les brachystochrones planes, et dans les brachystochrones absolues, à la force centrifuge* $\frac{v^2}{r}$.

Calculons d'abord la résultante N.

En remarquant que le rayon de courbure

$$r=\frac{ds}{\sqrt{\left(d\dfrac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\dfrac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\dfrac{dz}{ds}\right)^2}},$$

et que les trois angles que sa direction fait avec les trois axes ont respectivement pour cosinus

$$r\frac{d\dfrac{dx}{ds}}{ds},\quad r\frac{d\dfrac{dy}{ds}}{ds},\quad r\frac{d\dfrac{dz}{ds}}{ds},$$

on aura

$$N = vr\left\{\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\frac{dv}{dx} + \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\frac{dv}{dy} + \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\frac{dv}{dz}\right\}.$$

Maintenant, dans l'équation générale des brachystochrones

$$\chi = \frac{v\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{dv}{dx}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{v\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{dv}{dy}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{v\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} - \frac{dv}{ds}\frac{dz}{ds} + \frac{dv}{dz}}{\frac{dF}{dz}},$$

multiplions les deux termes de chaque rapport respectivement par $\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}$, $\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}$, $\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$, et ajoutons terme à terme. Remarquons, d'ailleurs, qu'en appelant θ l'angle que la normale à la surface fait avec la direction du rayon de courbure, on a

$$\cos\theta = \frac{\frac{dF}{dx}d\frac{dx}{ds} + \frac{dF}{dy}d\frac{dy}{ds} + \frac{dF}{dz}d\frac{dz}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}},$$

ou bien

$$\cos\theta = \frac{\frac{dF}{dx}d\frac{dx}{ds} + \frac{dF}{dy}d\frac{dy}{ds} + \frac{dF}{dz}d\frac{dz}{ds}}{A},$$

en désignant, pour abréger, le dénominateur par A. Il viendra, après quelques réductions,

$$\chi = \frac{v\left[\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2\right] + \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\frac{dv}{dx} + \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\frac{dv}{dy} + \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\frac{dv}{dz}}{A\cos\theta},$$

ou bien

$$\chi = \frac{v\frac{1}{r^2} + N\frac{1}{vr}}{A\cos\theta} = \frac{1}{Avr}\,\frac{N + \frac{v^2}{r}}{\cos\theta}.$$

Or, pour les brachystochrones planes, on a évidemment

$$\cos\theta = 0;$$

d'autre part, ainsi qu'il a été dit au dernier paragraphe du n° **12**, on a, pour les brachystochrones absolues,

$$\chi = 0.$$

Dans les deux cas, on aura donc

$$-N = \frac{v^2}{r},$$

ce qui démontre le théorème énoncé [*].

18. *Supposons, sur une surface* F $(x, y, z) = 0$, *une série de brachystochrones issues d'un même point* A; *soient* AM, AM',... *des arcs parcourus dans le même temps, la vitesse initiale étant supposée la même; le lieu des points* M, M',... *sera une trajectoire normale à chaque brachystochrone* [**].

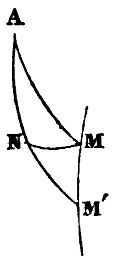
Caractérisons chaque brachystochrone, par exemple par l'angle φ qu'elle fait, au point de départ, avec une brachystochrone particulière, ou par une fonction de cet angle; un point particulier M d'une brachystochrone pourra être caractérisé par le temps t de la

---

[*] Ce théorème, en ce qui concerne les brachystochrones planes, est dû à Euler, qui l'a regardé comme exprimant la propriété caractéristique de ces courbes. (*Mechanica*, tome II.)

[**] Ce théorème m'a été communiqué par M. J. Bertrand, qui le démontre ainsi qu'il suit :

Si l'angle en M' est aigu, on peut faire en M un angle NMM' $>$ NM'M ; on aura



alors MN $<$ M'N: alors le mobile, arrivé en N avec une certaine vitesse, pourra parcourir (sa vitesse ne changeant pas sensiblement) l'élément NM en moins de temps qu'il n'en mettrait à parcourir l'élément NM', d'où il résulterait que la ligne ANM serait parcourue en moins de temps que la ligne ANM' ou AM ; ce qui est absurde.

descente de A en M. On pourra donc se représenter les coordonnées de chaque point M de la surface, comme fonctions de deux variables indépendantes (t, φ).

Cela étant, si l'on pose

$$S = \frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\varphi},$$

S sera une fonction qui deviendra nulle en même temps que le cosinus de l'angle que font en M la brachystochrone AM et la trajectoire MM′; or on aura, en différentiant par rapport à t,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{d\varphi} + \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{d\varphi\, dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{d^2y}{d\varphi\, dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{d^2z}{d\varphi\, dt},$$

ou bien

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{d\varphi}\right) + v\frac{dv}{d\varphi}.$$

Rappelons-nous, maintenant, les équations de la brachystochrone, et remarquons qu'en mettant en évidence la variable t, l'expression

$$\frac{d\dfrac{dx}{v ds} - ds\dfrac{d\frac{1}{v}}{dx}}{\dfrac{dF}{dx}}$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{d\dfrac{1}{v^2}\dfrac{dx}{dt} - v dt\dfrac{d\frac{1}{v}}{dx}}{\dfrac{dF}{dx}},$$

ou bien

$$\frac{\left(\dfrac{1}{v^2}\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{2}{v^3}\dfrac{dv}{dt}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{1}{v}\dfrac{dv}{dx}\right)dt}{\dfrac{dF}{dx}}.$$

Les équations de la brachystochrone deviendront alors

$$\frac{\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{2}{v}\dfrac{dv}{dt}\dfrac{dx}{dt} + v\dfrac{dv}{dx}}{\dfrac{dF}{dx}} = \frac{\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{2}{v}\dfrac{dv}{dt}\dfrac{dy}{dt} + v\dfrac{dv}{dy}}{\dfrac{dF}{dy}} = \frac{\dfrac{d^2z}{dt^2} - \dfrac{2}{v}\dfrac{dv}{dt}\dfrac{dz}{dt} + v\dfrac{dv}{dz}}{\dfrac{dF}{dz}},$$

et elles donneront, en multipliant respectivement les termes de chaque rapport par $\frac{dx}{d\varphi}$, $\frac{dy}{d\varphi}$, $\frac{dz}{d\varphi}$, et remarquant que la somme des dénominateurs est alors nulle, et que, par suite, la somme des numérateurs doit l'être,

$$o = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{d\varphi}\right) - \frac{2}{v}\frac{dv}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\varphi}\right) + v\left(\frac{dv}{dx}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{d\varphi}\right),$$

ou bien

$$o = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{d\varphi}\right) - \frac{2}{v}\frac{dv}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\varphi}\right) + v\frac{dv}{d\varphi},$$

$$o = \frac{dS}{dt} - \frac{2}{v}\frac{dv}{dt}S,$$

et, par suite,

$$\frac{\frac{dS}{dt}}{S} = 2\frac{\frac{dv}{dt}}{v}.$$

L'intégration de cette équation donnera, en représentant par K une certaine fonction de φ seulement,

$$(1) \qquad S = Kv^2.$$

Supposons maintenant que les mobiles partent tous du même point avec la même vitesse initiale v_0, dans des directions différentes; il est clair alors que les arcs infiniment petits AM, AM',..., parcourus dans le même temps avec une même vitesse, auront même longueur, et que, par suite, la trajectoire MM',... sera un cercle décrit dans le plan tangent en A, et ayant son centre en A. On aura donc, pour $v = v_0$, $S_0 = o$, quel que soit φ; ce qui exige que K soit nul, quel que soit φ. Et comme d'ailleurs K ne dépend pas du temps, on aura identiquement $K = o$, et, par suite, $S = o$, pour toutes les trajectoires; ce qui démontre le théorème énoncé.

Si la vitesse initiale v_0 était nulle, les brachystochrones seraient, au point de départ, tangentes entre elles et à la ligne de plus grande pente. Dans ce cas, la trajectoire MM'... est un arc infiniment petit

(du second ordre) d'un cercle d'un rayon infiniment petit (du premier ordre), ayant le point A pour centre; et le théorème énoncé s'applique encore.

19. Le théorème précédent peut s'étendre à des brachystochrones non issues du même point, toutes les fois qu'il existe une trajectoire qui rencontre normalement ces courbes en des points où les mobiles parcourants ont la même vitesse v_0; les arcs AM, AM',... étant alors remplacés par les arcs parcourus dans le même temps à partir de la trajectoire orthogonale.

Il est, en effet, aisé de voir que les raisonnements qui conduisent à l'équation (1) s'appliquent encore ici; seulement la variable φ désignerait alors, par exemple, la longueur de l'arc de la trajectoire compris entre un point déterminé de cette courbe et le point où elle est rencontrée par la brachystochrone que l'on veut caractériser. Cela posé, S devant être nul pour la valeur particulière v_0, K sera nul identiquement, et l'on aura toujours $S = 0$ pour une valeur quelconque de v.

20. Si l'on suppose que la vitesse du mobile soit constante (n° **13**) les brachystochrones deviendront des lignes géodésiques, et il est évident que les théorèmes que nous venons de démontrer auront leurs correspondants relativement à ce nouveau genre de lignes [*].

21. Supposons maintenant que l'on mène, à partir d'une certaine surface, toutes les brachystochrones absolues normales à cette surface; les extrémités M, M',... des arcs parcourus dans le même temps formeront une surface dont chaque élément, tel que MM', sera normal à la brachystochrone correspondante AM.

Donc chaque brachystochrone sera normale à la surface lieu des trajectoires.

Pour les lignes géodésiques, cela revient à dire qu'en prolongeant d'une même longueur toutes les normales à une surface donnée, on obtient de nouvelles surfaces ayant les mêmes normales.

---

[*] Ces théorèmes, dans le cas des lignes géodésiques, ont été établis par M. Gauss, dans ses recherches sur la Théorie générale des surfaces. (*Mémoires de la Société de Gottingue*, tome VI, 1823-1827.)

22. Revenons au cas où la force donnée est la pesanteur.

On a

$$v = \sqrt{2g(z - z_0)}, \quad \frac{d\frac{1}{v}}{dx} = 0, \quad \frac{d\frac{1}{v}}{dy} = 0,$$

et l'équation générale des brachystochrones devient

$$\frac{d\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{d\frac{dy}{ds\sqrt{z - z_0}}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{d\frac{dz}{ds\sqrt{z - z_0}} - \frac{ds}{dz}\,d\frac{1}{\sqrt{z - z_0}}}{\frac{dF}{dz}}.$$

Si la surface $F(x, y, z) = 0$ est supposée être un plan vertical, par exemple $y = 0$, on a alors les deux équations

$$d\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_0}} = 0, \quad d\frac{dz}{ds\sqrt{z - z_0}} - \frac{ds}{dz}\,d\frac{1}{\sqrt{z - z_0}} = 0.$$

La première de ces deux équations représente, ainsi qu'on l'a déjà vu, une cycloïde; la seconde doit donc évidemment représenter la même courbe.

Si la surface $F(x, y, z) = 0$ est un cylindre droit

$$F(x, y) = \text{constante},$$

l'une des équations de la brachystochrone sera

$$d\frac{dz}{ds\sqrt{z - z_0}} - \frac{ds}{dz}\,d\frac{1}{\sqrt{z - z_0}} = 0, \tag{1}$$

et cette équation ne changera pas quand on développera le cylindre sur le plan des xz. Or, sous cette forme, et sur le plan des xz, elle représente, comme on vient de le voir, la brachystochrone plane; ainsi, la brachystochrone cylindrique se développe suivant la brachystochrone plane.

Il est clair, d'ailleurs, que la démonstration synthétique donnée (n° 8) pour un cylindre circulaire s'applique à un cylindre droit quelconque.

23. Considérons maintenant le cas particulier où la force qui sol-

licite le mobile est constamment dirigée vers un centre fixe, cette force étant supposée une certaine fonction de la distance r.

La vitesse v sera alors une fonction connue de la distance; soit

$$\frac{1}{v} = \varphi(r). \tag{1}$$

Or on a, en prenant le centre d'attraction pour origine des coordonnées,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

d'où

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r},\quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r},\quad \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r};$$

les équations de la brachystochrone absolue seront donc, avec l'équation (1), et en observant que $\frac{d\frac{1}{v}}{dx} = \frac{d\varphi(r)}{dx} = \varphi'(r)\frac{x}{r}$,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi'(r)\frac{x}{r} &= \frac{d\frac{dx}{vds}}{ds},\\ \varphi'(r)\frac{y}{r} &= \frac{d\frac{dy}{vds}}{ds},\\ \varphi'(r)\frac{z}{r} &= \frac{d\frac{dz}{vds}}{ds},\end{aligned}\right.$$

d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{d\frac{dx}{vds}}{d\frac{dy}{vds}},$$

et, par suite,

$$xd\frac{dy}{vds} - yd\frac{dx}{vds} = 0,$$

et en intégrant,

(2)
$$\left\{\begin{aligned} xdy - ydx &= c''vds,\\ &\text{on aurait de même,}\\ ydz - zdy &= c\,vds,\\ zdx - xdz &= c'vds.\end{aligned}\right.$$

Multipliant ces trois équations respectivement par z, x, y, et ajoutant les produits, il viendra

$$0 = vds\,(c''z + cx + c'y),$$

ou

$$cx + c'y + c''z = 0,$$

équation d'un plan qui passe par l'origine des coordonnées. Ainsi, la courbe est tout entière dans le plan qui passe par le point de départ, le point d'arrivée et le centre d'attraction; ce qu'il était facile de prévoir.

En prenant ce plan pour plan des zx, la courbe sera représentée par les deux équations

$$v \text{ ou } \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\varphi(r)},$$
$$zdx - xdz = Avds;$$

en coordonnées polaires (r, θ), cette équation devient

$$(3) \qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = Av^2,$$

et elle montre que, lorsqu'un point mobile est assujetti à suivre la brachystochrone sous l'influence d'une force émanée du point O, *l'aire décrite par le rayon vecteur dans un temps infiniment petit est proportionnelle au carré de la vitesse.*

Il est clair que la projection de la même aire sur un plan quelconque suit la même loi; ce qu'on pourrait d'ailleurs démontrer aisément au moyen des équations (2).

Nous supposerons que la vitesse initiale soit nulle. Dans ce cas, on voit, par l'équation (3), que *la brachystochrone est tangente au rayon vecteur qui passe par le point de départ.* En effet, cette équation donne $\frac{d\theta}{dt} = 0$, à l'origine du mouvement.

On peut voir aussi que, *lorsque les points de départ et d'arrivée sont situés sur une même droite passant par l'origine, la brachystochrone n'est autre chose que cette droite.*

Car on a

$$\frac{d\theta}{dt} = A\,\frac{v^2}{r^2},$$

et l'équation (1) deviendra

$$\lambda = \mathrm{A}v.$$

d'où

$$\theta_1 - \theta_0 = \mathrm{A}\int_{r_0}^{r_1} \frac{v^2}{r^2}\, dt,$$

l'intégrale étant prise depuis le point de départ jusqu'au point d'arrivée. Or ici $\theta_1 = \theta_0$, donc $\mathrm{A} = 0$; et l'équation de la brachystochrone se réduit à

$$\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

d'où

$$\theta = \theta_0 = \theta_1,$$

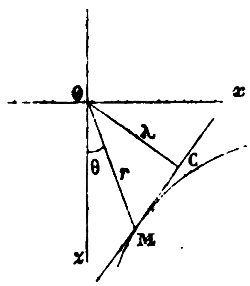
équation de la droite sur laquelle se trouvent, d'après l'hypothèse, le point de départ et celui d'arrivée.

On remarquera que ce théorème est un cas particulier de celui qui a été démontré (n° **16**).

24. L'équation

$$(1) \qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = \mathrm{A}v^2$$

peut être mise sous une autre forme.



Soit $\mathrm{OC} = \lambda$ la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente MC; on aura

$$\lambda = r \sin \mathrm{OMC}.$$

Mais on sait que

$$\sin \mathrm{OMC} = r\frac{d\theta}{ds};$$

par suite,

$$\lambda = r^2 \frac{d\theta}{ds},$$

On voit donc que *la vitesse en chaque point est proportionnelle à la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre d'attraction sur la tangente* [*].

25. Sans pousser plus loin l'étude des différents cas particuliers qui peuvent se présenter, nous nous bornerons à déduire ici le cas de la pesanteur de celui que nous venons d'examiner.

Il suffit de supposer que le centre d'attraction C est à l'infini, et que la force est constante.

Adoptons d'abord une origine fixe O, et soit c l'ordonnée verticale du centre d'attraction supposé placé sur l'axe des z. Un calcul analogue à celui du n° **23** conduirait à l'équation suivante pour la brachystochrone,

$$(z-c)\,dx - x\,dz = \mathrm{A}v\,ds.$$

D'ailleurs, si la force est constante et égale à g, on aura

$$\mathrm{X} = g\,\frac{x}{r},\quad \mathrm{Z} = g\,\frac{z-c}{r},$$

et, par suite,

$$v = \sqrt{2g\,(r_0 - r)},$$

et l'équation de la brachystochrone deviendra

$$(z-c)\,dx - x\,dz = \mathrm{A}'ds\sqrt{r_0 - r},$$

dans laquelle A′ est une certaine fonction de c.

A la limite, cette équation devient

$$dx = \mathrm{A}''ds\sqrt{z - z_0}, \tag{1}$$

en posant $-\mathrm{A}'' =$ limite de $\frac{\mathrm{A}'}{c}$ pour $c = \infty$, et en remarquant que $\sqrt{r_0 - r}$ a pour limite $\sqrt{z - z_0}$.

Or l'équation (1) n'est autre chose que l'équation différentielle de la cycloïde.

---

[*] Ce théorème a été démontré par Euler dans le second volume de sa *Mécanique*.

Sur l'équation aux différences partielles qui concerne l'équilibre de la chaleur dans un corps hétérogène;

PAR J. LIOUVILLE.

Cette équation bien connue

$$(1)\qquad \frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx}+\frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy}+\frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz}=0,$$

où k est une fonction de x, y, z représentant la conductibilité variable d'un point à un autre, se ramène à l'équation plus simple relative au cas d'une conductibilité constante, lorsque l'on a

$$(2)\qquad \frac{d^2.\sqrt{k}}{dx^2}+\frac{d^2.\sqrt{k}}{dy^2}+\frac{d^2.\sqrt{k}}{dz^2}=0.$$

En développant, en effet, les différentiations indiquées dans l'équation (1), divisant ensuite par $\sqrt{k}$, et ajoutant au résultat le premier membre de l'équation (2) multiplié par u, j'obtiens, à l'aide d'une réduction facile, l'équation

$$\frac{d^2.u\sqrt{k}}{dx^2}+\frac{d^2.u\sqrt{k}}{dy^2}+\frac{d^2.u\sqrt{k}}{dz^2}=0,$$

laquelle prend la forme indiquée

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0,$$

en posant $u\sqrt{k}=\varphi$.

Démonstration géométrique de quelques théorèmes relatifs à la théorie des surfaces;

Par M. J. BERTRAND.

I.

Théorème I. *Si l'un des rayons de courbure d'une surface est constant, cette surface appartient à la famille des surfaces canaux, c'est-à-dire qu'elle peut être considérée comme l'enveloppe des positions d'une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une certaine courbe.*

Ce théorème a été établi par Monge dans son *Traité d'Analyse appliquée à la Géométrie;* M. Rodrigues en a donné depuis, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique,* une démonstration plus simple, mais qui, comme celle de Monge, est purement analytique. Les considérations suivantes conduisent très-simplement au même résultat.

Considérons une des lignes de courbure le long desquelles le rayon de courbure soit constant. Les normales menées à la surface par les différents points de cette ligne enveloppent, comme on sait, une ligne à double courbure à laquelle elles doivent être toutes tangentes et qui est le lieu des extrémités des rayons de courbure. Mais ici les rayons de courbure étant tous égaux, le lieu de leurs extrémités est une courbe située sur une surface *parallèle* à la surface proposée; cette courbe doit, par conséquent, être coupée à angle droit par les normales de celle-ci sur lesquelles se trouvent ses différents points. Ces normales devant lui être tangentes et la couper à angle droit, cette courbe ne peut exister et doit se réduire à un point. Ainsi donc toutes les normales à la surface menées par les points d'une même ligne de courbure doivent concourir en un même point. Si, de ce point comme centre, avec un rayon égal au

rayon de courbure donné, on décrit une sphère, cette sphère sera évidemment inscrite dans la surface, et la touchera tout le long de la ligne de courbure; une seconde ligne de courbure pourra être considérée comme la courbe de contact d'une seconde sphère inscrite de même rayon, et, par suite, la surface proposée est l'enveloppe d'une série de sphères de même rayon. Si l'on considère deux sphères infiniment voisines, elles se coupent évidemment suivant un grand cercle; ce grand cercle doit être, d'après la théorie connue des enveloppes, leur ligne de contact avec la surface, et, par suite, d'après ce qui a été dit plus haut, l'une des lignes de courbure pour lesquelles le rayon est constant. Le centre de courbure commun aux différents points de ce cercle est évidemment placé en son centre.

II.

Corollaire. *Si les deux courbures d'une surface sont constantes, cette surface est une sphère.*

D'après les résultats que nous venons d'obtenir, les centres de première et de seconde courbure doivent former dans la surface proposée deux lignes en chaque point desquelles doivent se réunir un nombre infini de normales menées par les points d'une même ligne de courbure. Mais toutes ces normales doivent former un plan, car ce sont les rayons d'un même cercle; et comme elles doivent rencontrer le lieu des centres de la seconde courbure, ce lieu doit être situé dans tous les plans qui répondent aux diverses lignes de la première courbure: il ne peut donc être qu'une droite par laquelle passeront les différents plans; et, par suite, les normales de la surface proposée rencontrant une même droite, celle-ci est de révolution, or la sphère est évidemment la seule surface de révolution dont les deux courbures soient constantes.

La démonstration précédente serait en défaut si les deux courbures constantes étaient égales entre elles, car, dans ce cas, les courbes qui contiennent les centres de courbure se réduiraient à une seule; mais une pareille hypothèse est inadmissible, à moins que la courbe ne se réduise à un point. Et, en effet, dans le cas actuel, tous les points de la surface sont des ombilics, et, par suite, une courbe quelconque

peut être considérée comme ligne de courbure. Si donc les normales menées à la surface par les différents points de cette courbe ne concouraient pas en un même point, elles devraient être tangentes à la ligne qui contient les centres de courbure, et, par conséquent, toutes les normales de la surface seraient tangentes à une même courbe; ce qui évidemment est impossible, car il faudrait pour cela que tous les points de cette surface fussent en même temps situés sur la surface développable dont la courbe en question serait l'arête de rebroussement.

III.

Théorème II. *Une surface dont tous les points sont des ombilics est une sphère.*

Ce théorème, dû à Meunier, a été démontré depuis par Monge et par Poisson. Ces géomètres l'établissent en intégrant les équations différentielles qui expriment la condition énoncée; on peut, comme on va le voir, y parvenir par des considérations purement géométriques.

Si tous les points d'une surface sont des ombilics, les deux nappes de la surface lieu des centres de courbure se confondent. Si l'on considère sur cette surface une ligne quelconque, cette ligne sera le lieu des centres de courbure relatifs à une certaine ligne tracée sur la surface proposée, et les normales menées par les points de cette dernière ligne seront tangentes à la première. On en conclut que si M est un point de la surface lieu des centres de courbure, A le point correspondant de la surface proposée, AM doit être tangente à toutes les courbes menées par le point M sur la première surface. Le lieu des points M a donc pour chaque point une tangente, et non pas un plan tangent; c'est donc une courbe, et non une surface. Nous sommes donc conduits à conclure, comme dans le cas précédent, que les normales à la surface proposée doivent être tangentes à une même courbe; ce qui est impossible, à moins que cette courbe ne se réduise à un point, ce qui n'aura lieu que si la surface est une sphère.

IV.

THÉORÈME III. *Si l'une des séries de lignes de courbure d'une surface est formée de courbes planes situées dans des plans parallèles, les lignes de l'autre série seront également planes. Les lignes de courbure parallèles projetées sur le plan de l'une d'elles donneront des courbes ayant même développée, et la surface pourra être engendrée par une courbe de figure invariable dont le plan tournera autour de la surface d'un cylindre auquel il restera constamment tangent.*

Ce théorème a été démontré par Monge, puis par M. Olinde Rodrigues par la considération d'équations aux différences partielles. La démonstration suivante me paraît plus propre à entrer dans l'enseignement.

D'après un théorème de M. Joachimstall, démontré géométriquement par M. Liouville dans le tome XI de ce Journal, les lignes de l'une des courbures étant planes, leurs plans coupent la surface sous un angle constant, tout le long d'une même ligne. Il en résulte que deux quelconques de ces plans intercepteront sur les lignes de courbure de l'autre système des arcs de longueurs égales. Cette égalité est évidente, en effet, quand les plans considérés sont infiniment rapprochés, et elle a, par conséquent, lieu pour les sommes d'un nombre quelconque d'éléments correspondants, et, par suite, pour deux arcs finis quelconques.

Si maintenant on projette la surface sur un plan parallèle à ceux des lignes de courbure du premier système, les deux séries de lignes de courbure seront représentées en projection par des courbes orthogonales, puisque l'une d'elles a toujours sa tangente parallèle au plan de projection; de plus, les lignes du premier système conserveront la propriété d'intercepter sur les projections de deux lignes quelconques du second système des arcs de même longueur. Et, en effet, les éléments égaux de ces lignes sur la surface ont évidemment la même inclinaison sur le plan de projection, et, par suite, leurs projections doivent être égales. Or on sait que si, sur un plan, deux séries de courbes se coupent à angle droit, de manière à décomposer le plan en rectangles infiniment petits, la différence entre deux côtés opposés

d'un de ces rectangles est proportionnelle à la courbure des lignes auxquelles ces côtés appartiennent, et ne peut s'annuler que quand cette courbure est elle-même égale à zéro. Les lignes de la seconde courbure se projettent donc suivant des lignes droites; elles sont, par conséquent, planes. On voit aussi que les projections des lignes de courbure du premier système ont toutes mêmes normales, et, par suite, mêmes développées. On peut ajouter que les lignes de courbure du second système sont nécessairement superposables; car si l'on considère deux de ces courbes partant de deux points A et A' d'une même ligne de courbure du premier système, en rapportant chacune d'elles à des axes rectangulaires situés dans son plan et dirigés suivant la droite d'intersection des plans des deux lignes de courbure et suivant une perpendiculaire à cette droite; nommant y les ordonnées parallèles à ce dernier axe, $\frac{dy}{dx}$ sera exprimé, dans les deux courbes, par une même fonction de y, en sorte que les deux lignes ont même équation différentielle; et comme pour $y = o$, on a dans l'une et dans l'autre $x = o$, et la même valeur pour $\frac{dy}{dx}$, les deux courbes ne peuvent manquer d'être superposables.

Cette dernière propriété montre que la surface peut être engendrée par le mouvement d'une ligne de figure invariable dont le plan reste constamment perpendiculaire à un plan fixe, et, par suite, tangent à un même cylindre.

V.

Théorème IV. *Si une surface fermée est telle, que des plans parallèles y déterminent constamment des sections semblables, cette surface est un ellipsoïde.*

On sait, en effet, qu'un plan parallèle à un plan tangent mené à une distance infiniment petite du point de contact donne toujours pour section une courbe infiniment petite dont la *forme* diffère infiniment peu de celle d'une ellipse; si donc toutes les sections faites par des plans parallèles sont rigoureusement semblables entre elles, il faut qu'elles soient toutes des ellipses.

Reste donc à démontrer qu'une surface dont toutes les sections planes sont des ellipses est nécessairement un ellipsoïde. Cette proposi-

tion a été admise par plusieurs auteurs, mais on n'en a pas, à ma connaissance, publié de démonstration [*].

Nous commencerons par remarquer que, dans une surface dont toutes les sections sont des ellipses, le lieu des milieux d'un système quelconque de lignes parallèles est un plan. Et, en effet, tout plan parallèle aux cordes doit évidemment couper ce lieu suivant une ligne droite. Or, par deux points quelconques A et B appartenant à ce lieu, on peut toujours faire passer un pareil plan qui le coupera, par conséquent, suivant la droite AB; cette droite, qui réunit deux points quelconques du lieu, y est, par conséquent, située tout entière, ce qui est la propriété caractéristique du plan.

Considérons un de ces plans diamétraux qui coupent la surface suivant une ellipse ayant son centre en un point O. Menons par ce point une parallèle OC aux cordes que le plan coupe en deux parties égales, et considérons dans la surface une série de sections planes parallèles à un plan quelconque conduit suivant OC. Ces diverses sections seront, par hypothèse, des ellipses, et dans chacune de ces ellipses le diamètre des cordes parallèles à OC sera la droite d'intersection du plan de cet ellipse par le plan diamétral qui correspond à cette direction; ces divers diamètres sont donc tous parallèles entre eux. Il est évident, de plus, que leurs milieux sont en ligne droite, car ce sont des cordes parallèles d'une même ellipse; enfin leurs conjugués, étant des droites parallèles à OC, forment évidemment un plan, et, par suite, leurs extrémités sont sur une ellipse résultant de l'intersection de ce plan par la surface proposée et ayant un diamètre commun avec celle qui résulte de l'intersection du plan diamétral. D'après cela, la surface peut être considérée comme engendrée par une ellipse de grandeur variable qui se meut de manière à ce que son plan restant parallèle à un plan fixe, les deux extrémités de deux diamètres conjugués soient toujours situées sur deux ellipses ayant un diamètre commun; or rien n'est plus facile que de former l'équation d'une pareille surface, et l'on reconnaîtra sans peine un ellipsoïde.

---

[*] M. P.-H. Blanchet m'a parlé, depuis la rédaction de cette Note, d'un ouvrage qu'il compte prochainement publier et dans lequel cette proposition se trouve démontrée.

VI.

Je terminerai cette Note en indiquant un rapprochement entre deux propriétés importantes des surfaces que l'on démontre indépendamment l'une de l'autre.

Sur une surface quelconque, les lignes géodésiques ont en chaque point leur plan osculateur normal à la surface. Cette proposition me paraît une conséquence immédiate du théorème de Meunier, d'après lequel le rayon de courbure d'une ligne tracée sur une surface est égal à celui de la section normale menée suivant la tangente, multiplié par le cosinus de l'angle que cette section forme avec le plan osculateur de la courbe proposée. Il est évident, en effet, qu'un arc infiniment petit dont la corde est donnée diffère d'autant plus de cette corde que sa courbure est plus grande. Si donc on donne sur une surface deux points infiniment voisins A et B, l'arc le plus court qui puisse réunir ces deux points sera celui qui aura le plus grand rayon de courbure; et comme tous ces arcs peuvent être considérés comme ayant même tangente, le théorème de Meunier nous apprend que le plus grand rayon de courbure appartiendra à celui dont le plan osculateur sera normal à la surface. La ligne la plus courte doit donc, en chacun de ses points, jouir de cette propriété.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. GAUSS;

PAR M. J. BERTRAND.

(Avec une Note de M. DIGUET, élève à l'École Normale.)

M. Liouville a publié récemment une démonstration du théorème important de M. Gauss, qui consiste en ce qu'une surface étant donnée, si on la suppose flexible, mais inextensible, quelle que soit la manière dont on la déforme, le produit des rayons de courbure restera invariable en chaque point. Cette démonstration, quoique très-élégante, étant peut-être un peu trop longue pour qu'on puisse l'introduire dans l'enseignement, j'ai cru faire une chose utile en cherchant à la simplifier autant que possible. Les raisonnements auxquels j'ai été conduit diffèrent complétement de ceux qui ont été employés jusqu'ici; le résultat auquel je parviens n'est, il est vrai, qu'un cas particulier de la solution du problème général résolu par M. Gauss; mais ce cas particulier suffit pour la démonstration complète du beau théorème que je viens d'énoncer.

Considérons sur la surface un point O, et soient R_1, R_2 les deux rayons de courbure principaux de la surface en ce point. Concevons un fil infiniment petit dont l'une des extrémités soit fixée en O et qui tourne en restant tendu sur la surface; l'autre extrémité de ce fil décrira une courbe dont la longueur ne variera pas quand on viendra à déformer la surface, et qui, de plus, pourra être considérée comme décrite sur la surface transformée de la même manière qu'elle l'avait été sur la surface primitive et à l'aide d'un fil de même longueur. Nous allons calculer le périmètre total de cette courbe, et nous verrons qu'il ne peut rester constant que si le produit $R_1 R_2$ est lui-même invariable.

Je remarquerai d'abord que si l'on considère les diverses lignes géo-

désiques passant par le point O, chacune d'elles a un contact du second ordre avec la section normale correspondante, et, par suite, même rayon de courbure; en sorte que le rayon de celle de ces courbes qui fait avec la section principale l'angle ω sera donné par la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\sin^2\omega + \frac{1}{R_2}\cos^2\omega.$$

Soit s la longueur infiniment petite du fil qui a servi à tracer la courbe en question, il est évident que si l'on projette cette courbe sur le plan tangent en O, on obtiendra une ligne dont les rayons vecteurs seront les sinus d'arcs égaux à s dans des cercles ayant pour rayons les diverses valeurs de R; et en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre, on aura

$$\rho = s - \frac{s^3}{6R^2}.$$

L'élément de longueur de cette projection sera donné par la formule

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2,$$

ou, en négligeant $d\rho^2$ qui contient en facteur la sixième puissance de s,

$$dl^2 = \left(s - \frac{s^3}{6R^2}\right)^2 d\omega^2 = s^2 d\omega^2 - \frac{s^4 d\omega^2}{3R^2} = s^2 d\omega^2$$
$$- \frac{s^4 d\omega^2}{3}\left(\frac{1}{R_1}\sin^2\omega + \frac{1}{R_1}\cos^2\omega\right)^2;$$

l'élément de la courbe elle-même sera donné par la formule

$$d\sigma^2 = dl^2 + dz^2,$$

z étant la distance des différents points de cette courbe au plan tangent en O. Or cette distance est, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre,

$$z = \frac{s^2}{2R};$$

on a donc

$$dz^2 = \frac{s^4}{4}\left(d\,\frac{1}{R}\right)^2 = \frac{s^4}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin^2 2\omega\, d\omega^2,$$

ce qui donne

$$d\sigma^2 = s^2 d\omega^2 + s^4 d\omega^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{R_1}\sin^2\omega + \frac{1}{R_2}\cos^2\omega\right)^2 \\ +\frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin^2 2\omega\, d\omega^2 \end{array} \right\},$$

d'où l'on tire, en extrayant la racine carrée, et négligeant les puissances de s supérieures à la quatrième,

$$d\sigma = sd\omega + s^3 d\omega \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6R_1^2}(3\sin^2\omega - 4\sin^4\omega) \\ + d\omega\, \frac{1}{6R_2^2}(3\cos^2\omega - 4\cos^4\omega) \\ - \frac{4}{3R_1R_2}\sin^2\omega\cos^2\omega \end{array} \right\}.$$

En intégrant de o à 2π, et remarquant que

$$\int_0^{2\pi} (3\sin^2\omega - 4\sin^4\omega)\, d\omega = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (3\cos^2\omega - 4\cos^4\omega)\, d\omega = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\omega\cos^2\omega\, d\omega = \frac{\pi}{4},$$

on trouve

$$\sigma = 2\pi s - \frac{\pi s^3}{3R_1R_2}.$$

Cette expression ne dépendant que de $R_1 R_2$, et σ ne devant pas changer quand on déforme la surface, le produit $R_1 R_2$ doit lui-même rester invariable; ce qui est précisément le théorème de M. Gauss.

Dans la déformation de la surface, le contour que nous venons de calculer doit non-seulement conserver la même longueur, mais il doit en être de même de l'aire renfermée dans ce contour. M. Diguet, élève de l'École Normale, à qui j'avais fait cette remarque, m'a remis le calcul suivant, qui conduit à l'expression de cette surface infiniment petite, et peut fournir, par conséquent, une nouvelle démonstration du théorème de M. Gauss.

Note de M. DIGUET.

Par un point A d'une surface, on mène différentes lignes géodésiques, telles que AM, sur lesquelles on prend une longueur constante infiniment petite $AM = s$. Le lieu des points M forme une courbe fermée infiniment petite, dont je vais calculer la longueur et l'aire.

Les équations différentielles de la ligne géodésique AM sont, comme on sait,

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} + p\frac{d^2z}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} + q\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Et si l'on développe en série les équations de cette courbe, en prenant l'arc pour variable indépendante, on aura

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{6} + \ldots,$$

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{6} + \ldots,$$

$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \ldots.$$

L'équation de la surface donne

$$\frac{dz}{ds} = p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = p\frac{d^2x}{ds^2} + q\frac{d^2y}{ds^2} + r\frac{dx^2}{ds^2} + 2u\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + t\frac{dy^2}{ds^2};$$

on trouve d'ailleurs, en différentiant les équations (1),

$$\frac{d^3x}{ds^3} + p\frac{d^3z}{ds^3} + \left(r\frac{dx}{ds} + u\frac{dy}{ds}\right)\frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

$$\frac{d^3y}{ds^3} + q\frac{d^3z}{ds^3} + \left(u\frac{dx}{ds} + t\frac{dy}{ds}\right)\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Cela posé, je prends pour axes de coordonnées les tangentes aux sections normales principales et la normale au point A. J'appelle α l'angle que la tangente en A à la ligne AM fait avec l'axe des x.

J'aurai alors, à cause des équations précédentes et de ce choix de coordonnées,

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = \cos\alpha, \quad \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 = \sin\alpha, \quad \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 = r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha,$$

$$\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 = -r(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha)\cos\alpha,$$

$$\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 = -t(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha)\sin\alpha.$$

Les équations de la ligne AM deviennent donc

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} x &= s\cos\alpha - \frac{s^3}{6}r(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha)\cos\alpha + \ldots, \\ y &= s\sin\alpha - \frac{s^3}{6}t(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha)\sin\alpha + \ldots, \\ z &= \frac{s^2}{2}(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant je suppose que s soit constant et égal à la longueur infiniment petite assignée précédemment, et que je regarde α comme variable indépendante, ces équations seront celles de la courbe infiniment petite demandée.

Soit σ la longueur de cette courbe, on aura

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Substituant les valeurs de dx, dy, dz tirées des équations (2), et faisant les réductions convenables, on trouve

$$d\sigma = d\alpha . s\sqrt{1 - \frac{rts^2}{3} + \ldots},$$

et en développant le radical d'après la formule du binôme,

$$d\sigma = d\alpha . s\left(1 - \frac{rts^2}{6} + \ldots\right),$$

d'où

$$\sigma = 2\pi s - \frac{2\pi r t s^3}{6} + \ldots,$$

ou bien

$$\sigma = 2\pi s - \frac{2\pi s^3}{6 R_1 R_2} + \ldots,$$

R_1, R_2 désignant les rayons de courbure principaux.

Soit λ l'aire de cette courbe, on aura

$$d\lambda = dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

je pose

$$V = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

V est une fonction de x et de y. J'aurai donc

$$V = V_0 + \left(\frac{dV}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{dV}{dy}\right)_0 y$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dx dy}\right)_0 xy + \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)_0 y^2\right] + \ldots.$$

Or on reconnaît aisément que

$$V_0 = 1,$$

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dV}{dy}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) = r^2, \quad \left(\frac{d^2V}{dx dy}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)_0 = t^2.$$

Il en résulte

$$V = 1 + \frac{1}{2}(r^2 x^2 + t^2 y^2);$$

donc

$$d\lambda = dx dy \left[1 + \frac{1}{2}(r^2 x^2 + t^2 y^2)\right],$$

et, par suite, x_0, x_1 désignant les valeurs extrêmes de x,

$$\lambda = 2\int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^y dy \left[1 + \frac{1}{2}(r^2 x^2 + t^2 y^2)\right],$$

$$\lambda = 2\int_{x_0}^{x_1} dx \left[y + \frac{1}{2}\left(r^2 x^2 + \frac{t^2 y^2}{3}\right) y\right].$$

Je prends α pour variable indépendante, et je calcule

$$ydx + \frac{1}{2}\left(r^2 x^2 + \frac{r^2 y^2}{3}\right) ydx$$

en fonction de cette variable au moyen des équations (2), et je trouve, en négligeant toujours les puissances de s supérieures à la quatrième, que cette quantité est égale à

$$-s^2 \sin^2\alpha\, d\alpha + \frac{s^4 \sin^2\alpha}{6 R_1 R_2}(1 - 2\cos^2\alpha).$$

Si donc on remarque que les valeurs de α correspondant aux limites x_0 et x_1 sont π et 0, puis si l'on renverse les limites, on aura enfin

$$\lambda = 2s^2 \int_0^\pi \sin^2\alpha\, d\alpha - \frac{s^4}{3R_1R_2}\int_0^\pi \sin^2\alpha\, d\alpha + \frac{2s^4}{3R_1R_2}\int_0^\pi \sin^2\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha.$$

Or

$$\int_0^\pi \sin^2\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\pi \sin^2\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{8}.$$

Donc

$$\lambda = \pi s^2 - \frac{\pi s^4}{12 R_1 R_2}.$$

C. Q. F. T.

SUR LE MÊME THÉORÈME;

Par M. PUISEUX.

(Extrait d'une Lettre à M. Liouville.)

« Besançon, le 12 janvier 1848.

» ... Vous avez donné dans le cahier de juillet 1847 du *Journal de Mathématiques* une démonstration d'un théorème de M. Gauss. La lecture de cet article m'a rappelé qu'il y a un an environ, j'avais rédigé une démonstration de la même proposition : elle est comprise implicitement dans la méthode plus générale que vous avez suivie; cependant, comme elle n'exige que des calculs assez simples, peut-être jugerez-vous à propos de la publier. Je la transcris :

» Étant données deux surfaces, on peut toujours, et cela d'une infinité de manières, faire correspondre chaque point de l'une à un point de l'autre, de façon qu'à toute figure tracée sur la première réponde une figure tracée sur la seconde. Nous dirons que les deux surfaces peuvent se transformer l'une dans l'autre, si l'on peut faire en sorte que les arcs correspondants soient égaux : cette condition remplie, il s'ensuit que les aires et les angles correspondants sont aussi égaux, comme on le voit par la décomposition des surfaces en triangles infiniment petits.

» Cela posé, le théorème énoncé par M. Gauss est le suivant :

« Si deux surfaces peuvent être transformées l'une dans l'autre, le
» produit des rayons de courbure principaux en chaque point de
» l'une est égal au produit de ces mêmes rayons au point corres-
» pondant de l'autre. »

» Pour le prouver, observons d'abord que si l'on trace sur la première surface une ligne géodésique, c'est-à-dire qui soit la plus courte entre deux de ses points, la ligne correspondante sur la seconde surface sera aussi une ligne géodésique : car si entre deux des points de cette dernière on pouvait mener une plus courte ligne sur la

seconde surface, il existerait aussi entre les deux points correspondants sur la première surface une ligne plus courte que la ligne géodésique qui les joint: ce qui est contre la définition.

» Imaginons maintenant que, par un point A de l'une de nos surfaces, on mène toutes les lignes géodésiques qui y aboutissent, et qu'on prenne sur chacune d'elles un petit arc d'une même longueur σ; les extrémités de ces arcs formeront une courbe fermée. Faisons la même construction sur la seconde surface à partir du point A' correspondant à A; nous obtiendrons une nouvelle courbe fermée qui sera la correspondante de la première, et devra, par conséquent, avoir la même longueur. De cette égalité résulte, comme on va le voir, le théorème en question.

» Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la première surface; faisons, suivant l'usage,

$$dz = p\,dx + q\,dy,\quad dp = r\,dx + s\,dy,\quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

d'où il suit

$$d^2 z = p\,d^2 x + q\,d^2 y + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

Appelons s l'arc d'une ligne géodésique passant au point (x, y, z): on sait que le rayon de courbure de cette ligne est normal à la surface; il en résulte, en prenant s pour variable indépendante,

$$d^2 x + p\,d^2 z = 0,\quad d^2 y + q\,d^2 z = 0,$$

d'où, en différentiant,

$$\begin{aligned} d^3 x + p\,d^3 z + (r\,dx + s\,dy)\,d^2 z = 0,\\ d^3 y + q\,d^3 z + (s\,dx + t\,dy)\,d^2 z = 0. \end{aligned}$$

De plus, si nous appelons ξ, η, ζ les coordonnées de l'extrémité d'un arc égal à σ porté sur cette ligne à partir du point (x, y, z), nous aurons

$$\begin{aligned} \xi &= x + \frac{dx}{ds}\sigma + \frac{d^2 x}{ds^2}\frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3 x}{ds^3}\frac{\sigma^3}{6} + \ldots,\\ \eta &= y + \frac{dy}{ds}\sigma + \frac{d^2 y}{ds^2}\frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3 y}{ds^3}\frac{\sigma^3}{6} + \ldots,\\ \zeta &= z + \frac{dz}{ds}\sigma + \frac{d^2 z}{ds^2}\frac{\sigma^2}{2} + \ldots. \end{aligned}$$

» Supposons maintenant que le point (x, y, z) soit le point désigné ci-dessus par A; prenons ce point pour origine des coordonnées, l'axe des z étant dirigé suivant la normale à la surface, nous aurons

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

On peut d'ailleurs disposer de l'axe des x de façon que l'on ait $s = 0$. Il suit de ces hypothèses, et des équations écrites plus haut,

$$dz = 0, \quad d^2z = r dx^2 + t dy^2, \quad d^2x = 0, \quad d^2y = 0,$$
$$d^3x + r^2 dx^3 + rt\, dx\, dy^2 = 0, \quad d^3y + rt\, dx^2\, dy + t^2 dy^3 = 0.$$

Nommons α l'angle que fait avec l'axe des x la tangente à l'arc σ menée par l'origine, de sorte qu'on ait

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha;$$

nous en conclurons

$$\frac{d^2z}{ds^2} = r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha,$$
$$\frac{d^3x}{ds^3} = -r^2\cos^3\alpha - rt\cos\alpha\sin^2\alpha,$$
$$\frac{d^3y}{ds^3} = -rt\cos^2\alpha\sin\alpha - t^2\sin^3\alpha,$$

et, par conséquent,

$$\xi = \sigma\cos\alpha - \frac{\sigma^3}{6}(r^2\cos^3\alpha + rt\cos\alpha\sin^2\alpha) + \ldots,$$
$$\eta = \sigma\sin\alpha - \frac{\sigma^3}{6}(rt\cos^2\alpha\sin\alpha + t^2\sin^3\alpha) + \ldots,$$
$$\zeta = \frac{\sigma^2}{2}(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha) + \ldots.$$

En donnant à α toutes les valeurs de zéro à 2π, on aura successivement par ces formules tous les points de la courbe fermée définie plus haut. Si maintenant nous désignons par λ l'arc de cette courbe, lequel est une fonction de α, on aura

$$d\lambda = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2},$$

ou bien, en ayant égard aux valeurs précédentes de ξ, η, ζ et obser-

vant que α seul est variable,

$$d\lambda = d\alpha\sqrt{\sigma^2 - \frac{rt\sigma^4}{3} + \ldots} = d\alpha\left(\sigma - \frac{rt\sigma^3}{6} + \ldots\right).$$

Pour avoir la longueur totale l de la courbe, il suffit d'intégrer $d\lambda$ depuis zéro jusqu'à 2π; on trouve ainsi

$$l = 2\pi\sigma - \frac{\pi rt\sigma^3}{3} + \ldots,$$

ou bien, en appelant R et R_1 les rayons de courbure principaux de la surface au point A,

$$l = 2\pi\sigma - \frac{\pi\sigma^3}{3RR_1} + \ldots.$$

Pour la courbe correspondante construite sur la seconde surface, on trouvera semblablement

$$l' = 2\pi\sigma - \frac{\pi\sigma^3}{3R'R'_1} + \ldots.$$

Les expressions de l et de l' devant être égales, quelque petit que soit σ, les coefficients des mêmes puissances de cet arc doivent être égaux; on a donc

$$RR_1 = R'R'_1.$$

Ce qu'il fallait démontrer. »

EXPÉRIENCES

SUR UNE NOUVELLE ESPÈCE D'ONDES LIQUIDES

A DOUBLE MOUVEMENT OSCILLATOIRE ET ORBITAIRE;

PAR M. ANATOLE DE CALIGNY.

Objet de ces recherches.

La plupart des auteurs qui ont écrit sur les ondes ayant trop généralisé leurs idées, il en est résulté des discussions intéressantes. mais qui laissent des doutes sur des points essentiels. Je crois qu'on ne saurait avoir trop de prudence en abordant un sujet aussi vaste, et je me borne en ce moment à décrire, parmi les phénomènes que j'ai étudiés dans des canaux factices, quelques-uns de ceux qui peuvent se coordonner avec des expériences faites plus en grand par d'autres observateurs. La plupart des lois de l'hydraulique, qui ont été vérifiées sur une très-grande échelle, avaient été d'abord établies au moyen d'expériences assez en petit, par la raison même qu'il est alors beaucoup plus facile d'étudier et surtout de varier convenablement les phénomènes. Je crois que ce moyen de recherche est bon quand on ne l'emploie qu'avec réserve.

On a cru longtemps que les molécules oscillaient à l'intérieur des flots comme dans des siphons, c'est-à-dire d'une manière plus ou moins analogue, en un mot, se mouvaient dans des courbes ouvertes. C'est effectivement ce qui se présente, du moins lorsque l'eau n'étant pas courante, un système particulier d'ondes arrive à l'une des extrémités d'un canal rectangulaire, où ces ondes se balancent sans conserver leur mouvement de transport *apparent* avant de revenir sur leurs pas.

Gerstner a publié en 1804, à Prague, un travail sur les ondes, reproduit en 1825 dans un ouvrage des frères Weber. Il décrit, à ce qu'il paraît, selon un extrait donné en anglais par M. Russell, un système particulier d'ondes où les mouvements se font dans des espèces d'*orbites* ou courbes fermées. Des expériences de M. Russell, publiées en 1844 par l'*Association britannique*, ont confirmé les recherches de ce savant [*]. On sait que M. Russell est particulièrement connu, d'ailleurs, par ses nombreuses expériences sur l'onde dite *solitaire*.

L'*onde solitaire* est une intumescence qui se propage à des distances très-considérables du point d'application de la cause qui l'a produite, sans être nécessairement précédée ou suivie de creux ou d'ondes d'une hauteur analogue. Il y a dans cette onde un mouvement de transport *réel,* c'est-à-dire que lorsqu'elle passe sur un point donné d'un canal, on la voit balayer le fond de ce canal; puis la masse d'eau qu'elle a mise en mouvement revient au repos, pendant que la masse suivante est à son tour transportée à la surface et au fond de l'eau. Ce phénomène est produit par l'action d'un premier gonflement résultant, soit d'une introduction d'eau subite, soit du mouvement *horizontal* d'un corps d'une section assez grande par rapport à celle du canal.

Quand on traîne un rouleau sur un tapis, la ride qui en résulte semble marcher avec ce corps, mais, en définitive, la masse entière du tapis ne s'est déplacée que d'une petite quantité, fonction des dimensions de cette ride. Cette comparaison paraît très-propre à faire concevoir comment les choses se passent, quant au transport définitif,

---

[*] Il y a dans les *Annales des Ponts et Chaussées,* depuis 1835, une discussion intéressante sur cette matière, ainsi que dans un ouvrage de M. le colonel Emy, intitulé : *Du mouvement des ondes et des travaux hydrauliques maritimes,* in-4, 1831, où se trouvent des développements du système du mouvement *orbitaire,* que je regarde comme très-intéressants, bien que je ne les adopte pas tous. On peut voir, dans les planches de cet ouvrage et dans celles des *Annales des Ponts et Chaussées,* la limite des courbes du profil de l'ondulation, en supposant successivement les ondes produites par le *siphonnement* ou par le mouvement *orbitaire.* Ce dernier mouvement n'étant que la conséquence d'un siphonnement dans l'onde particulière que j'ai étudiée, il n'est pas étonnant que la courbure observée paraisse se confondre, comme pour l'hypothèse du siphonnement, avec la courbe dite des *sinus.*

dans le phénomène dont il s'agit, si l'on considère toute l'étendue du canal.

De quelque manière que soient engendrées dans le canal les autres espèces d'ondes où le transport réel est à peu près nul, il est difficile qu'il n'en résulte pas des gonflements particuliers, et, par suite, des ondes *solitaires* qui modifient plus ou moins les premières. Cela complique singulièrement la question et peut servir, selon moi, à expliquer des phénomènes qui semblent d'abord se contredire, quoiqu'on ne puisse douter de leur existence après le témoignage des savants ingénieurs qui se les sont opposés.

M. Aimé a publié en 1842, dans les *Annales de Physique et de Chimie,* des expériences tout à fait nouvelles sur les mouvements intérieurs des flots dans la rade d'Alger. Il a conclu des empreintes symétriques laissées sur un plateau, fixé au fond de la mer, par une sorte de toupie armée de pointes, que le mouvement était oscillatoire sur ce fond. Ce genre d'observations ne me paraît pas entièrement suffisant pour établir cette conséquence, car elles pourraient résulter, au moins jusqu'à un certain point dans diverses localités, d'ondes *solitaires successives* qui marcheraient dans des sens opposés, comme je l'expliquerai plus loin.

Le même auteur a fait aussi des expériences très-intéressantes sur les mouvements qui se présentent entre le fond et la surface de la mer, au moyen des courbes serpentantes décrites par des fluides moins denses que l'eau, qui s'échappaient au fond de la mer du sommet d'un vase conique. Il ne tire aucune conséquence positive de la forme de ces courbes, quant à la nature des mouvements entre la surface et le fond de l'eau, en un mot, quant à la discussion entre les partisans du *siphonnement* et ceux du mouvement *orbitaire;* il dit seulement qu'il n'en résulte nullement que le mouvement oscillatoire du fond se présente dans les régions supérieures. En 1839, dans une Lettre à M. Arago, il avait d'abord tiré de ses expériences une conclusion plus tranchée: il pensait que le mouvement était *orbitaire* dans les régions supérieures; que les *orbites* étaient de plus en plus aplaties au-dessous, et finissaient par être sur le fond de simples lignes droites. Mais cette *conséquence,* insérée dans le *Compte rendu de l'Académie*

des Sciences, n'a été reproduite par M. Aimé ni dans son Mémoire de 1842, ni dans le Mémoire avec quelques additions sur le même sujet, qu'il a inséré en 1845 dans son grand ouvrage sur l'Algérie. Il est, de plus, à remarquer que, dans ce dernier ouvrage, il a supprimé la phrase qui renvoyait à un travail ultérieur sur les trajectoires des molécules liquides entre la surface de la mer et le fond, où il regarde le mouvement comme essentiellement oscillatoire.

Il doit être, en effet, extrêmement difficile, surtout dans un bateau lui-même agité par les vagues, d'étudier *directement* ces trajectoires, du moins à de grandes profondeurs : et même pour de moindres profondeurs on n'a pas de point de repère fixe; s'il y en avait, la question serait éclaircie depuis longtemps. Mais si mes expériences dans un canal factice représentent parfaitement le phénomène que M. Aimé avait entrevu, tout en l'indiquant seulement à titre de *conséquence* qu'il n'a même osé reproduire dans deux Mémoires postérieurs, à plusieurs années d'intervalle, alors ces expériences perdront le caractère d'observations trop en petit pour qu'on en puisse tirer des conséquences utiles. Les observations faites en grand dans la rade d'Alger, et celles que j'ai faites sur un canal factice, se prêteront un mutuel appui, et ne seront pas inutiles aux ingénieurs qui reprendront ultérieurement ces recherches pour l'étude des travaux hydrauliques maritimes.

J'ai d'ailleurs été frappé des points de ressemblance de cette *espèce particulière* d'ondes avec les ondes dites *solitaires*. Or, si je prouve que ces dernières, non-seulement ne sont pas sensibles, mais ne peuvent pas s'engendrer quand le corps qui les occasionne s'enfonce à une profondeur très-petite par rapport à celle d'un canal, c'est une raison de plus pour penser que les phénomènes dont il s'agit doivent se présenter au moins dans les rades peu profondes. Cependant il ne faut voir principalement dans ces recherches qu'une étude scientifique de faits nouveaux destinés à coordonner, à concilier les hypothèses et les faits recueillis jusqu'à ce jour, en attendant que les méthodes d'observations directes puissent être perfectionnées par les ingénieurs; ce qui sera d'ailleurs très-difficile.

I.

Expériences sur la nouvelle espèce d'ondes à translation apparente.

Pour éviter les reproches faits aux expériences sur le mouvement *orbitaire* des ondes, citées par M. Emy, décrites dans l'ouvrage des frères Weber [*], je me suis servi d'un canal ayant à peu près 24 mètres de long, $0^m,72$ à $0^m,73$ de large et $0^m,42$ de profondeur. Ce canal rectangulaire en bois est doublé intérieurement en zinc; j'y ai étudié les ondes pour diverses hauteurs d'eau, surtout depuis $0^m,35$ jusqu'à $0^m,10$.

Je soulevais périodiquement un cylindre en bois vertical. Il suffisait de le disposer au milieu de la largeur du canal pour que chaque onde s'étendît sur toute cette largeur comme une seule *barre* horizontale à axe rectiligne. Le cylindre était, en général, assez gros par rapport à la largeur du canal, dont il occupait la moitié ou les deux tiers. Mais un cylindre d'un diamètre de $0^m,10$, et même bien au-dessous, suffisait pour que la *barre* dont je viens de parler s'étendît régulièrement sur toute la largeur du canal, et perpendiculairement à son axe.

La courbure des flots et leur longueur apparente dépendaient de l'intervalle de temps qui séparait chaque oscillation du cylindre. Les flots étaient d'autant plus aigus par rapport aux creux, que cet intervalle était plus long. Quand les oscillations étaient trop rapides, le milieu du canal était alternativement concave et convexe, jusqu'à une certaine distance du cylindre sur la longueur de plusieurs ondes, et les ondes n'étaient pas formées assez régulièrement. Mais il y avait une vitesse d'oscillation du cylindre que j'obtenais par tâtonnement, chaque période étant d'environ 1 seconde, pour laquelle la courbure des flots ne paraissait pas différer sensiblement de celle des creux, je m'en suis d'ailleurs assuré en y plongeant alternativement une planche verticale et parallèle aux parois longitudinales, la profondeur de l'eau dans le canal dépassant $0^m,30$.

---

[*] Le peu de profondeur d'un petit canal a été considéré par les partisans du *siphonnement* comme pouvant donner lieu à un mouvement *orbitaire* dans des circonstances exceptionnelles. On verra que cela paraît être précisément une cause particulière de mouvement oscillatoire. Le canal décrit dans l'ouvrage des frères Weber était beaucoup plus profond que celui dont je me suis servi.

La courbure des flots était d'autant plus aiguë, et leur longueur était d'autant plus diminuée que la profondeur de l'eau était relativement moindre. Pour une hauteur d'eau de $0^m,30$, j'ai surtout étudié les ondes quand elles avaient environ $0^m,10$ de haut au-dessus du creux.

Après avoir répandu du sable ou des grains de raisin bien sphériques sur le fond du canal, j'ai remarqué très-distinctement un mouvement de *va-et-vient* sur ce fond. Mais en observant les corps légers tenus en suspension dans l'intérieur du liquide, et considérant les mouvements de chacun d'eux en particulier, en les rapportant, bien entendu, à des *points fixes*, ce qui eût été à peu près impossible en mer, d'après ce qui m'a été dit par des voyageurs expérimentés, je les ai vus très-distinctement décrire des espèces d'ellipses dont, en général, dans les régions supérieures les axes verticaux paraissaient plus grands que les axes horizontaux. Chaque flot ou bourrelet liquide semble s'avancer d'un mouvement uniforme sans perdre rien de sa hauteur. Son aspect est analogue à celui d'une onde *solitaire*.

A l'époque où le gonflement du flot pousse en avant le liquide du côté du creux subséquent, il y a un mouvement de bas en haut dans le sens du mouvement apparent de l'onde. Les tranches d'eau s'entassant les unes sur les autres, il en résulte que l'écartement dans le sens vertical est d'autant plus grand, que le point est plus élevé au-dessus du fond. Il se présente un phénomène inverse dans le mouvement de retour vers le creux précédent. On voit à ces deux époques, même à la surface comme à l'intérieur, un mouvement de *va-et-vient horizontal*. Il y a aussi, comme je viens de le dire, un mouvement vertical de *va-et-vient*. On conçoit donc comment il en résulte un mouvement *orbitaire* dans les régions supérieures; mais ce n'est pas une raison pour qu'il y en ait un bien sensible sur le fond, où l'on ne voit, en effet, qu'un mouvement de *va-et-vient horizontal* dans le sable.

L'espèce de contre-courant *orbitaire* qui se présente dans cette onde donne cependant lieu à un phénomène singulier. Ayant répandu des grains de raisin vert bien sphériques sur le fond horizontal du canal, en choisissant les parties les mieux polies de ce fond, j'ai constamment remarqué qu'ils étaient, après le passage de l'onde, très-sensiblement plus repoussés en arrière qu'ils ne l'avaient été en avant par le mouvement direct dans le sens de la translation apparente de cette onde.

Ayant aussi répandu du sable ou des grains de raisin à une extrémité du canal, j'ai produit un système d'ondes en agitant le cylindre verticalement à l'autre extrémité, et j'ai toujours trouvé qu'après le retour de ces ondes, ces corps étaient bien plus repoussés en arrière qu'en avant.

En disposant le cylindre oscillant qui produisait les ondes près d'une des parois latérales du canal, je faisais naître un système d'ondes en *zig-zag* qui avait constamment pour effet de ramener dans l'axe du canal les grains de raisin que j'avais disposés sur le fond, près des parois.

Ces divers effets dépendent des phénomènes qu'on pourrait appeler de *protection*, provenant des *matelas liquides*, phénomènes peu connus et qu'il serait utile d'apprécier dans leurs rapports avec les machines hydrauliques.

Le recul s'est présenté même sur un ressaut brusque disposé loin des extrémités, et dont la surface horizontale était à peu près à la moitié de la profondeur de l'eau dans le canal qui était alors de $0^{m},26$, et dont la longueur de $1^{m},50$ ne différait pas beaucoup du double de celle d'une onde. La longueur de l'onde n'était pas, du reste, nécessairement précise, puisqu'elle dépendait de la vitesse d'oscillation du cylindre que je faisais fonctionner *à la main*. Ce ressaut, formé de trois planches, dont celle de dessus occupait les trois quarts de la largeur du canal, était appuyé latéralement et fixé au moyen de coins de pierre. Quand il survenait une onde *solitaire* provenant d'une accumulation occasionnée par quelque mouvement horizontal dans la manœuvre du cylindre, les petits corps répandus sur le ressaut étaient repoussés en avant, sans revenir sur leurs pas, comme par une onde *solitaire* quelconque. Mais quand il n'y avait pas d'onde *solitaire*, il se présentait, en définitive, un mouvement de recul plus sensible que celui de progression dans le sens de l'onde.

On donne généralement le nom d'*ondes courantes* à celles qui n'ont qu'un mouvement de transport réel si faible par rapport au mouvement apparent, qu'on l'a même révoqué en doute. Il y a cependant un transport réel sensible dans les ondes de la mer, et les marins en tiennent compte dans le calcul de leur route, comme l'a remarqué M. de Tessan dans son ouvrage sur le voyage de *la Vénus*. Sans cela il serait assez difficile d'expliquer le mouvement de translation apparente. Celui qui se présente sur un champ de blé n'est pas tout à fait dans

le même cas. Le vent se transporte si le blé ne change pas de place, et fait naître des mouvements, en général, successifs qui subsistent un certain temps. Si l'on conçoit qu'un mouvement de transport apparent puisse résulter, par exemple, de la rotation d'une vis dont l'axe n'avance ni ne recule, comment pourrait-il se faire que, dans le canal dont je me suis servi, un système d'ondes s'avançât *en ne laissant derrière lui que des ondes incomparablement plus faibles,* si quelque chose ne se transportait pas avec ce système? Quand on observe la trace laissée par le liquide le long des parois verticales, on ne voit sur toute la longueur qu'une ligne horizontale; mais, aux extrémités du canal, les traces des ondes qui s'y resserrent en se balançant sont généralement plus élevées. Il est vrai que cet effet provient surtout du phénomène particulier de raccourcissement et de balancement qui, à cette extrémité, fait quelquefois même venir les sommets à la place des creux. Mais enfin s'il n'y avait point une accumulation d'eau quelconque, il n'y aurait pas de raison pour que les ondes revinssent sur leurs pas. Quant aux mouvements observés directement dans le sens des ondes, ils étaient peu sensibles tant qu'il n'y avait pas d'onde *solitaire*. Il arrivait même quelquefois qu'un corps flottant glissait un peu en arrière sur le flanc postérieur de la dernière onde. A l'extrémité du canal, il se présente un phénomène intéressant. Les ondes principales dont le nombre est, en général, du moins avant la réflexion à l'autre extrémité, analogue à celui des oscillations du cylindre qui les a engendrées, se pressent, et même à une assez grande distance de l'extrémité du canal, on voit très-distinctement se rétrécir les espèces d'orbites décrites par les petits corps en suspension dans l'eau. Bientôt il n'y a plus qu'un véritable *siphonnement* dans les flots. La première onde semble coupée par la moitié, à l'extrémité du canal, et le long du parement vertical le mouvement de va-et-vient est vertical dans la région supérieure des ondes, tandis qu'il est horizontal dans les creux; de sorte que c'est un mouvement horizontal qui tend à renverser le parement. Lorsque ensuite les ondes raccourcies s'allongent de nouveau pour revenir sur leurs pas, on voit très-distinctement les trajectoires redevenir graduellement des orbites elliptiques, et le mouvement elliptique est précisément en sens contraire de celui qui existait quand les ondes avaient un mouvement apparent venant de l'autre extrémité du canal.

On voit combien il doit être indispensable d'étudier ces phénomènes

à d'assez grandes distances des rivages, si l'on ne veut pas s'exposer à des erreurs graves. Or, comme à de grandes distances des rivages on n'a plus de points de repère fixes, voilà précisément ce qui fait la difficulté de ce genre d'observations et l'utilité de celles que l'on peut étudier dans un canal factice, où il est facile d'isoler chacun des phénomènes que l'on y peut produire, sans toutefois se permettre de leur attribuer trop de généralité avant de connaître en grand quelque chose de suffisamment analogue.

J'ai essayé de mesurer la vitesse de cette espèce d'ondes courantes. J'avais d'abord cru y parvenir, mais j'ai reconnu que, pour un seul observateur, il y avait une cause d'incertitude assez difficile à éviter complétement dans un canal de cette longueur, à cause du temps pendant lequel les flots se balancent à chaque extrémité, même quand ils sont peu nombreux à l'origine de leur mouvement. Or il serait à désirer, pour prendre cette mesure, que l'on pût considérer plusieurs traversées du système, comme cela est facile pour l'onde *solitaire*. Ce qu'il y a de certain, c'est que l'onde *solitaire*, lancée d'une extrémité du canal, où a d'abord été engendré le système d'*ondes courantes*, atteint ce système, quoiqu'elle soit partie longtemps après. Il est essentiel de remarquer que la rencontre se fait quand la vitesse de la crête des ondes courantes paraît encore sensiblement uniforme.

Deux systèmes d'ondes courantes de cette espèce peuvent se traverser, ou plutôt se réfléchir sans se détruire. Le balancement horizontal des bourrelets, dans le phénomène du *clapotage* qui en résulte d'abord, est conforme aux observations sur le clapotage de la mer, si bien décrites dans l'ouvrage de M. le colonel Emy.

Quand un système est lancé d'une extrémité à l'autre du canal, et ensuite abandonné à lui-même, il traverse toujours le canal sensiblement dans le même temps, pourvu que les ondes conservent encore une hauteur bien visible. Elles conservent toujours à peu près la même longueur en s'affaiblissant de plus en plus.

Quand on dispose un cylindre vertical fixe dans l'axe du canal, sa présence diminue la force des ondes, parce qu'elles se brisent en l'enveloppant; elles se reforment bientôt en barre rectiligne derrière lui, par suite d'un balancement latéral. Mais lorsqu'un obstacle vertical est disposé *latéralement*, il en résulte des ondes en zigzag analogues à

celles dont j'ai déjà parlé. Je ne m'étendrai pas ici sur ces phénomènes particuliers, n'ayant pour but, dans ce Journal, que d'exposer les principes fondamentaux de mes recherches.

II.

Expériences sur la formation de l'onde solitaire.

Cette onde étant en mouvement, comme je l'ai indiqué ci-dessus, elle traversait le canal un certain nombre de fois, et sa vitesse moyenne, c'est-à-dire en y comprenant les instants très-courts de repos aux extrémités, calculée au moyen de plusieurs traversées, était, pour chaque profondeur d'eau dans ce canal, assez sensiblement exprimée au moyen de la loi trouvée par M. Russell. Elle était proportionnelle à peu près à la racine carrée de la profondeur de cette eau et égale à la vitesse d'un corps grave tombé de la moitié de cette profondeur. Cela n'était plus vrai pour les profondeurs très-faibles, ainsi que l'auteur anglais est le premier à en convenir. La question de la vitesse, combinée avec celle du bateau qui l'engendre, a été, comme on sait, traitée par M. Russell, et depuis par M. Morin. Mon but, ici, n'est pas d'approfondir cette matière, mais seulement de montrer en quoi consiste principalement la formation du phénomène, en le considérant, surtout comme détaché du bateau qui l'accompagne dans les cas ordinaires de la pratique des canaux où la navigation se fait à grandes vitesses.

Un cylindre dont le diamètre était environ les deux tiers de celui du canal, étant plongé jusqu'au fond, et s'élevant toujours d'ailleurs au-dessus de la surface de l'eau qui était à $0^{m},20$ au-dessus de ce fond, ne produisait pas cette onde de la même manière que lorsqu'il était enfoncé à une profondeur moindre. Quand il était plongé jusqu'au fond, et qu'on le traînait le long du canal avec un mouvement à peu près uniforme, en marchant au pas ordinaire, ce n'était pas immédiatement devant le cylindre qu'il fallait regarder pour voir se former l'onde, mais à une certaine distance en avant. Lorsqu'il n'était enfoncé qu'à une profondeur intermédiaire, on voyait l'onde se détacher immédiatement du cylindre au moment de son apparition en aval. Enfin, quand il était enfoncé seulement à une profondeur très-faible, de 2 ou 3 centimètres environ, cette onde ne paraissait pas du tout en avant du cylindre, où l'on ne voyait que quelques rides. Quand elle y apparaissait

par suite d'un enfoncement un peu plus profond, ce n'était qu'à la fin de la course, lorsqu'on arrivait à l'autre extrémité du canal, en marchant toujours d'un pas ordinaire. Dans le premier cas, celui de l'enfoncement maximum, lorsqu'on arrive à la moitié de la longueur du canal, l'onde *solitaire* atteint déjà l'autre extrémité, tandis que dans le second, celui de l'enfoncement intermédiaire, elle commence seulement à se détacher du cylindre.

On voit combien la profondeur de la partie plongée influe sur le mode de production de l'onde *solitaire*. Mais de quelque manière que cette onde ait d'abord été formée, quand elle arrive à l'autre extrémité du canal, elle s'y élève et semble coupée par la moitié. Elle revient ensuite sur ses pas, et, en définitive, la vitesse avec laquelle elle traverse plusieurs fois le canal ne paraît dépendre que de la profondeur d'eau; sa formation ne devant plus être, en effet, considérée que comme provenant d'une masse de liquide amoncelée à une des extrémités. Au moment où les deux systèmes d'ondes étudiées dans cette Note arrivent à chaque extrémité, on entend une espèce de coup de bélier qu'ils donnent contre le fond du parement vertical.

Ces faits s'accordent avec la manière suivante de considérer l'onde *solitaire*. Concevons deux tubes formant une sorte de grand T renversé, la branche horizontale étant remplie d'eau et la branche verticale n'en contenant pas encore; on les suppose très-minces pour n'avoir à s'occuper que d'un filet d'eau, abstraction faite des résistances passives. La partie de la colonne liquide en amont du tube vertical est supposée d'abord seule en mouvement. En vertu de ce mouvement, il monte de l'eau dans le tube vertical; la pression latérale de cette eau ascendante engendre graduellement de la vitesse dans la portion en aval, et diminue la vitesse en amont. Il y a un instant où la vitesse est la même en amont qu'en aval; puis la colonne verticale, en redescendant, achève d'éteindre graduellement la vitesse en amont, tandis qu'elle l'augmente en aval jusqu'à ce que la colonne d'amont ait, en définitive, perdu son mouvement. Ces effets supposent, bien entendu, certaines proportions dans les longueurs, les vitesses, etc. Mais, dans certaines hypothèses, on conçoit que la force vive peut être *passée* dans la colonne d'aval sans percussion proprement dite, et cependant d'une manière analogue à ce qui se présente dans le choc de deux corps élastiques, dont l'un est en mouvement et l'autre

au repos au moment du choc. Si l'on conçoit divers systèmes de ce genre convenablement disposés les uns par rapport aux autres, on aura une idée de la manière dont les choses se passent dans l'onde *solitaire*. C'est ainsi que l'intumescence se propage d'une extrémité du canal à l'autre, en faisant alternativement naître et éteindre le mouvement sur toute la hauteur du canal en chaque lieu où elle passe, de façon que chaque prisme liquide est à son tour transporté dans le sens du mouvement, et s'arrête ensuite sans retour bien sensible en arrière. Le chemin parcouru dépend évidemment de la grandeur de l'intumescence qui semble se transporter d'une manière continue, quoique la progression de chaque point soit, comme je l'ai dit, analogue à celle d'un tapis sur lequel se promène un rouleau.

Il est facile de voir, d'après ce qui précède, pourquoi l'onde *solitaire,* non-seulement n'est pas *sensible,* comme on le disait, quand la section du corps qui l'engendre est trop petite par rapport à celle du canal, mais pourquoi *elle ne peut pas même se produire*. En effet, s'il faut qu'elle s'appuie sur du mouvement pour se porter en avant d'une manière convenable, il faut que ce mouvement soit déjà propagé à une certaine profondeur, à moins que l'onde ne puisse s'appuyer sur un obstacle fixe, comme le fait le gonflement à chaque extrémité du canal.

L'assimilation du phénomène à celui des oscillations dans un tuyau ou système de tuyaux recourbés peut servir à concevoir comment il se fait que la vitesse de l'onde est d'autant plus grande que le canal est plus profond. S'il y a plus de *masse* à mouvoir dans la tranche verticale liquide, il y a bien moins de *force vive* à engendrer. C'est par la même raison que, dans les tuyaux de conduite recourbés verticalement, les oscillations de la colonne liquide sont d'autant plus rapides, que la section du tuyau horizontal est plus grande par rapport à celle de la partie verticale. La durée de chaque oscillation est proportionnelle, en général, pour les longs tuyaux de conduite, à la racine carrée du rapport de la seconde section à la première, conformément aux expériences et aux calculs que j'ai publiés dans les tomes III et VI de ce Journal. Or la première section est ici représentée, jusqu'à un certain point, par la section du prisme d'eau proportionnelle à la profondeur. Sans attacher à ce rapprochement plus d'importance qu'il n'en mérite, j'ai pensé qu'il n'était pas sans quelque

intérêt, du moins comme une sorte de représentation physique d'un résultat de calculs et d'expériences. Il y a lieu de penser que si l'onde est trop faible par rapport à la profondeur de l'eau, le mouvement n'a pas le temps de se distribuer jusqu'au fond du canal selon la même loi que pour une onde plus forte ; de sorte que les choses peuvent se passer, jusqu'à un certain point, comme si la profondeur du canal était moindre. Aussi les très-petites ondes *solitaires* sont, comme on sait, atteintes par les plus grandes. Enfin, quand les profondeurs de l'eau sont très-petites, les résistances passives sont relativement beaucoup plus fortes; les ondes ne vont pas même jusqu'à l'autre extrémité du canal, et elles s'évanouissent en arrondissant leurs *barres*, comme un arc qui se courbe de plus en plus, à mesure que le mouvement s'éteint.

Je ne m'étendrai pas ici sur des considérations faciles aujourd'hui à obtenir par l'analyse. Depuis le commencement de 1842, j'ai fait à la Société philomathique diverses communications sur les matières objet de cette Note, et il suffit de lire les écrits publiés avant cette époque pour voir en quoi j'ai contribué à éclairer des questions sur lesquelles on était loin d'être d'accord.

Il n'est pas vrai, comme on le croit généralement, qu'il n'y ait jamais de mouvement rétrograde dans l'onde *solitaire;* il y en a quelquefois quand la profondeur d'eau dans le canal est assez petite par rapport à la hauteur de l'onde, dont la vitesse n'est plus même permanente.

Le curieux phénomène de la rencontre des courants qui semblent se traverser, et qui dans la réalité se réfléchissent, comme Léonard de Vinci l'a remarqué il y a quatre siècles, trouve ici son application immédiate dans l'explication de la rencontre des ondes *solitaires* de hauteurs égales ou inégales, lancées des deux extrémités opposées du canal, et qui se traversent en apparence, mais dont on voit très-bien la réflexion à l'intérieur.

III.

Points de ressemblance de deux espèces d'ondes.

Quand une onde *solitaire* arrive à l'extrémité du canal où elle s'élève avant de revenir sur ses pas, elle fait reculer, comme les ondes dont j'ai parlé ci-dessus, le sable et les corps légers répandus sur le

fond à cette extrémité. Pour des ondes *solitaires* de hauteurs diverses, j'ai toujours observé que la distance de plus de 1 mètre du parement vertical à laquelle les grains de raisin étaient repoussés, le canal ayant une profondeur d'eau de $0^m,30$, était sensiblement double de celle à laquelle ils étaient repoussés par les ondes *courantes,* aussi de hauteurs diverses. Je dois ajouter que je n'attache pas beaucoup d'importance à la mesure numérique, parce que le fond n'était pas assez rigoureusement horizontal en tous ses points; c'est la constance de ce rapport pour diverses profondeurs qui est intéressante. Le rapport des vitesses des deux espèces d'ondes m'a aussi paru sensiblement constant pour chaque profondeur d'eau dans le canal, autant qu'il m'a été possible de l'observer avec les chances d'erreur dont j'ai parlé ci-dessus pour le cas des ondes courantes. C'est un point de comparaison de plus entre les deux systèmes.

Je ferai surtout remarquer que M. Russell a depuis longtemps décrit dans ses Mémoires les chemins parcourus par les petits corps en suspension dans le liquide à l'intérieur de l'onde *solitaire,* tels qu'il les a observés au moyen de parois latérales transparentes. Or il a trouvé que sur le fond de l'eau les trajectoires étaient rectilignes, et se courbaient de plus en plus d'une manière analogue à des demi-ellipses, à mesure qu'on s'approchait de la surface. J'avais été tellement frappé de cette analogie, que je m'attendais à retrouver dans son Mémoire de 1844 plus de détails que je n'en avais donné moi-même à la Société philomathique sur l'espèce d'ondes *courantes* dont je m'étais occupé depuis plusieurs années. Cependant, non-seulement il ne l'avait point vue, mais il la révoquait même en doute.

En définitive, les divers points de ressemblance que j'ai remarqués entre les ondes *solitaires* et cette espèce d'ondes *courantes* sont une raison de soupçonner que leurs causes, sans être identiques, ont nécessairement beaucoup de rapports. Les ondes *solitaires* ne peuvent pas se présenter, d'après ce que j'ai dit de leur formation, dans les mers très-profondes, à moins qu'il ne s'agisse des ondes de la marée, dont je ne m'occupe pas ici. Ce n'est donc point à l'étude des phénomènes de ces mers que l'on doit se permettre, à priori, d'appliquer l'espèce peut-être particulière d'ondes courantes dont j'ai donné la description. Mais l'hypothèse de M. Aimé se trouvant confirmée directement par les recherches précédentes, il y a lieu de penser

que ce phénomène est celui qui doit se présenter pour les ondes courantes dans les mers peu profondes, un de ceux, en un mot, qu'il est le plus intéressant d'étudier à cause de son action vers les côtes.

Il ne faut pas oublier d'ailleurs que les ondes *solitaires*, qui apparaissent souvent quand les profondeurs ne sont pas trop grandes, changent notablement l'action du phénomène. Ainsi, dans un système d'ondes courantes que l'on croyait bien réglé, il arrivait quelquefois, dans mes expériences, une onde *solitaire* qui faisait courber les sommets des flots en volutes. Si cette onde est faible, elle se perd bientôt dans les creux. Mais si l'on produit une onde assez puissante, elle passe sur tout le système d'ondes *courantes*, elle comble les creux, et survit à ce système en se promenant d'une extrémité à l'autre du canal.

On peut faire arriver plusieurs ondes *solitaires* qui se suivent d'assez près pour que des personnes encore peu au courant de ces phénomènes les confondent avec des ondes *courantes*, l'espace qui les sépare ressemblant à des creux. Alors le sable répandu au fond du canal peut être porté en avant comme par plusieurs soubresauts, et reporté en arrière d'une façon analogue, ainsi que je l'ai souvent observé. C'est ce genre particulier de translation multiple qui pourrait faire naître des doutes quant à l'action des ondes *courantes* sur l'interprétation du résultat des expériences de M. Aimé, faites au moyen de son ingénieux système de toupies plongées au fond de la mer, si mes expériences *directes* ne confirmaient point cette interprétation, et si les raisonnements ci-dessus ne montraient pas qu'en effet, les choses doivent se passer d'une manière analogue. La forme des courbes serpentantes qu'il a dessinées ne serait pas non plus suffisante pour établir le mouvement *orbitaire*, si mes observations directes ne venaient pas à l'appui de ses conclusions. Il devait être extrêmement difficile, surtout sans points de repère fixes, de bien observer cette courbe serpentante, à cause des mouvements du bateau et des effets de lumière. C'est pour cela, sans doute, qu'il a attribué dans ses dessins, aux sinuosités, une régularité qu'elles ne pouvaient point avoir, selon sa première hypothèse, pour de grandes différences de profondeur, etc.

Si cet ingénieux auteur, qui est mort victime de la science, avait

employé d'autres moyens d'observation, il serait intéressant d'en retrouver la trace, quelque vague qu'elle pût être, maintenant que mes expériences *directes* et les raisonnements au moyen desquels je les ai confirmées ne laissent aucun doute sur l'existence de l'onde qu'il avait d'abord annoncée, au moins dans des circonstances particulières que je suis parvenu à produire.

Quant aux expériences que j'ai faites sur la formation de l'onde *solitaire,* elles me semblent pouvoir servir à concilier jusqu'à un certain point les hypothèses que d'autres auteurs ont faites sur leurs vitesses dans des circonstances qui ne devaient pas être tout à fait identiques. Ces vitesses, au moins dans les premiers temps de la formation de l'onde, dépendent essentiellement du rapport de la section du canal à celle des corps qui les a engendrées; de sorte que si ce rapport est assez grand, on ne voit que les ondes de translation qui *accompagnent* les corps flottants d'une manière analogue aux rides sur lesquelles MM. Poncelet et Lesbros ont fait depuis longtemps de nombreuses expériences. Les phénomènes des rides ont été depuis été étudiées par M. Russell. Je m'en suis occupé moi-même; mais je n'en parlerai point dans cette Note, où il est entendu qu'il ne s'agit que des ondes d'une certaine grandeur par rapport à la profondeur de l'eau, et ayant de l'analogie avec les vagues proprement dites.

Je réserve aussi pour un travail ultérieur mes recherches sur les remous, et, en général, sur les ondes que j'ai observées dans les cours d'eau permanents. J'ajouterai seulement ici qu'en plongeant alternativement une planche transversale dans un canal rectangulaire, où l'eau a un mouvement permanent, cela suffit, si la planche est assez large, pour faire naître une onde *solitaire* dont la forme est semblable à celles que l'on a spécialement étudiées dans ces derniers temps. De sorte qu'il y a lieu de penser qu'elle ne diffère que par le nom de quelques remous particuliers signalés plus vaguement, il est vrai, depuis bien plus longtemps par Bidone [*].

---

[*] On sait parfaitement aujourd'hui qu'en général, le mouvement des ondes *courantes* décroît à mesure que la profondeur augmente, du moins quand les profondeurs sont assez grandes par rapport à la hauteur de l'onde. Pour étudier ce phénomène, avant d'en observer directement les effets, j'ai inventé un appareil dont j'ai même exé-

Conclusions.

Il est extrêmement difficile, pour ne pas dire impossible, dans l'état actuel de nos connaissances, de faire des observations *directes* sur les chemins parcourus par les molécules à l'intérieur des flots de la mer, surtout à des profondeurs considérables, du moins avant de bien connaître les phénomènes qui se présentent dans des canaux factices d'une grandeur convenable. Aussi la discussion très-intéressante qui a eu lieu entre MM. Emy et Virla, dans les *Annales des Ponts et*

---

cuté en 1840 un modèle fonctionnant, et dont il n'est peut-être pas inutile de conserver la trace.

Tout le monde sait que si l'on enfonce brusquement dans un réservoir rempli d'eau un entonnoir renversé, on produit une ascension brusque par un véritable coup de *canne hydraulique*. Mais on n'avait pas remarqué que si, au contraire, on soulève l'entonnoir ainsi plongé, il en résulte, en général, un jet d'eau plus fort, toutes choses égales d'ailleurs. L'ascension des parois de l'entonnoir donne lieu à une sorte de *vide conique annulaire*, et, par suite, à une baisse notable au-dessous du niveau du réservoir. Il en résulte une oscillation remontante et un coup de bélier assez fort. J'en ai conclu que, si le mouvement d'ondulation dans le sens vertical était moindre à une certaine profondeur qu'à la surface du réservoir, le mouvement d'ondulation supérieure soulevant l'entonnoir renversé au moyen d'un flotteur posé sur la vague, il en résulterait un effet parfaitement analogue à ce qui vient d'être dit. C'est, en effet, ce qui arrive : l'eau s'élève dans un tube vertical cylindrique au bas duquel est lié l'entonnoir renversé à une aussi grande profondeur qu'on le veut, elle atteint alternativement des hauteurs égales à plusieurs fois celle des vagues du réservoir où l'appareil est abandonné à lui-même, et constitue une nouvelle espèce de machines à élever l'eau par le moyen des vagues.

M. Russell dit, dans son Mémoire de 1844, qu'il ne connaissait pas le travail des frères Weber quand il a commencé le sien, qu'il ne l'aurait peut-être pas entrepris s'il avait connu le premier, et qu'en définitive, ses résultats n'en sont pas moins nouveaux. Il m'est arrivé la même chose pour le travail de M. Aimé, dont M. Russell ne fait pas non plus mention, et, de plus, je suis parvenu à établir d'une manière définitive une conséquence que ce physicien n'a pas reproduite ultérieurement, faute de preuves positives. Ce genre de remarque n'aurait aucun intérêt pour le public si la concordance des résultats obtenus séparément, l'un comme une sorte d'hypothèse, l'autre comme un fait, n'était pas une présomption en faveur de leur utilité, les échelles des observations étant d'ailleurs extrêmement différentes. Le résultat définitif est dû à l'ensemble des recherches de M. Aimé et des miennes.

Chaussées, jusqu'à la publication des expériences de M. Russell semblait rester sans solution définitive. Les expériences en petit, décrites dans l'ouvrage des frères Weber, ne paraissaient pas à M. Virla assez développées. Quant aux observations de M. Aimé dans la rade d'Alger, elles n'étaient pas suffisantes pour établir l'hypothèse qu'il avait d'abord présentée et qu'il n'avait pas reproduite, faute de preuves assez positives.

La longueur du canal sur lequel j'ai fait mes observations est beaucoup plus grande que celle du canal sur lequel ont été faites les observations décrites dans l'ouvrage des frères Weber. L'échelle de mes expériences est analogue à celles des diverses expériences au moyen desquelles on a successivement établi les lois de l'hydraulique avant de les vérifier très en grand. Je suis cependant le premier à convenir que ce travail aurait beaucoup moins de chances d'être utile, si les phénomènes qui y sont décrits ne pouvaient pas se coordonner avec ceux qui ont été observés beaucoup plus en grand par des auteurs connus.

Le phénomène du *clapotage* est conforme à des observations faites très en grand par M. Emy. Celui du *siphonnement,* à l'époque où les ondes n'ont plus de mouvement de translation même apparent, est conforme à des observations faites par M. Virla à Cherbourg, d'après les détails que M. le colonel Courtois a bien voulu me communiquer. La non-apparition de l'onde *solitaire* dans les profondeurs relativement considérables s'accorde avec ce que l'on voit tous les jours dans la navigation des grandes rivières, et avec les observations de M. Poncelet sur les rides. Quant à la différence des vitesses de l'onde *solitaire* provenant de la différence d'enfoncement des corps qui l'ont fait naître, elle paraît pouvoir mettre sur la voie d'une explication des dissidences d'opinion sur les vitesses de l'onde *solitaire*. Le phénomène est, d'après ce fait, bien moins compliqué peut-être qu'on n'avait d'abord été porté à le croire.

La courbure de l'onde *courante* semble parfaitement analogue à celle de l'onde *solitaire,* pour une profondeur d'eau suffisante dans le canal. Mais ce qu'il y a de plus caractéristique, c'est l'espèce de ressemblance qui se présente entre les *orbites* [*] parcourues par les molécules dans

[*] Quand je dis que les molécules parcourent des *orbites* ou *courbes fermées,* je

ce genre particulier d'ondes *courantes* que j'ai étudiées, et les chemins *demi-orbitaires*, si l'on peut s'exprimer ainsi, étudiés directement par M. Russell dans l'onde *solitaire*. Or celle-ci est produite seulement, comme je l'ai dit, pour les profondeurs qui ne sont pas trop considérables, relativement au corps qui les occasionne.

En définitive, la *conséquence* indiquée par M. Aimé avec une défiance qui la lui a même fait supprimer plus tard dans deux Mémoires publiés à plusieurs années d'intervalle devient beaucoup plus positive, maintenant que des observations directes, faites sur un canal factice où d'autres phénomènes des ondes de grandes dimensions se reproduisent assez fidèlement, montrent que non-seulement la combinaison de mouvements soupçonnée par ce physicien est *possible*, mais qu'elle *existe* bien réellement, au moins dans des cas particuliers. Les expériences de M. Aimé ont été faites précisément dans une rade où le mouvement produisait encore sur le fond des effets très-sensibles. Il y a donc lieu de penser que cette espèce d'ondes *courantes* dont la connaissance est due à l'ensemble des recherches de deux observateurs malheureusement étrangers l'un à l'autre, si toutefois elle ne constitue qu'un phénomène particulier, est du moins au nombre de ceux dont il sera utile de vérifier autant que possible les effets dans les rades, et, en général, dans les mers d'une profondeur assez peu considérable pour que le mouvement subsiste et soit obligé de devenir horizontal près du fond.

Ce qu'il y a, au reste, de plus intéressant dans mes expériences, c'est que le mouvement de recul au fond du canal est plus fort que le mouvement de progression dans le sens du mouvement de translation

---

veux seulement parler de l'aspect général du système; car si le mouvement était rigoureusement analogue à celui des anneaux d'une chaîne, il est clair qu'il se présenterait des *nœuds* qui modifieraient à chaque instant les *orbites*, comme l'a remarqué M. Virla. La génération *géométrique* des *orbites* est encore loin d'être connue. Les ondes *courantes* principales sont même précédées d'ondes *courantes* plus faibles, mais de longueur analogue; et quand elles parviennent à l'autre extrémité du canal, on commence par voir se balancer les plus faibles avant que les plus fortes arrivent jusqu'au *parement* de cette extrémité. La longueur des ondes est assez difficile à mesurer pour un seul observateur, tant qu'elles sont *courantes*. Si, par exemple, on y enfonce alternativement une planche, la trace laissée par l'onde est toujours nécessairement plus longue que cette onde. A. C.

apparente de ces ondes, même sur un ressaut. L'excès du recul est d'ailleurs bien moindre que la translation *apparente* de la surface des ondes.

Mes conséquences n'ont rien d'exclusif. Le système d'ondulation *à tourbillons*, connu sous le nom de mouvement *orbitaire*, paraissait *impossible* à des ingénieurs très-distingués. M. Russell l'a cependant de nouveau constaté, au moins dans des circonstances particulières, même sans l'oscillation horizontale, que je regarde comme le principe le plus essentiel du mouvement dans les circonstances où se présente l'espèce d'ondes que j'ai spécialement étudiée dans cette Note. Aussi, malgré la peine que j'ai à concevoir le mouvement apparent de translation dans des ondes *courantes* où il n'y aurait pas de mouvement *orbitaire* bien sensible, sauf le petit mouvement de translation réelle admis par les marins, je ne me prononcerai pas sur la possibilité de ces ondes. Il n'y a à proprement parler qu'un mouvement de siphonnement dans les premiers instants où les ondes *courantes* à translation apparente, après s'être balancées à une des extrémités du canal, tendent à revenir sur leurs pas. Or le mouvement *orbitaire* s'est présenté, selon moi, dans ces ondes comme une conséquence de l'espèce particulière de *siphonnement* occasionné par la réaction du fond du canal. Il est à remarquer que le phénomène des ondes solitaires résout, en partie du moins, les objections que se faisaient les partisans exclusifs du mouvement *orbitaire* et ceux du *siphonnement*.

Il est, en définitive, bien entendu que je me borne à présenter les phénomènes particuliers que je *décris* sans prétendre exclure les hypothèses plus générales auxquelles donnera lieu ultérieurement, sans doute, un sujet si vaste et si peu connu.

THÉORÈME GÉNÉRAL CONCERNANT L'INTÉGRATION DÉFINIE;

PAR M. GEORGE BOOLE (DE LINCOLN).

Soit R une fonction rationnelle de x, telle que les racines de l'équation

$$x - \mathrm{R} = v$$

soient réelles pour toutes les valeurs de v qui ne font pas évanouir la fonction $f(v)$; on a universellement

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x - \mathrm{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dv\, f(v),$$

quelle que soit la forme de la fonction $f(v)$.

De là on déduit facilement

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f\left(x - \frac{a_1}{x-\lambda_1} - \frac{a_2}{x-\lambda^2} \cdots - \frac{a_n}{x-\lambda_n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dv\, f(v),$$

pourvu que les valeurs des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient réelles et positives; celles des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ réelles.

On peut se servir de ce théorème général pour trois applications différentes.

Premièrement, pour l'évaluation des intégrales. Voici un exemple :

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-\left(x - \frac{a}{x}\right)^n} = \frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

pourvu que n soit pair; d'où résulte, en supposant $n = 2$, la formule connue

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}\,\pi^{\frac{1}{2}}\, e^{-2a}.$$

Deuxièmement, pour exprimer les sommes des intégrales transcen-

dantes. En supposant que $f(v)$ s'évanouisse dans l'équation (1) quand on a $v > q$ ou $v < p$, on obtient

$$\int_{p_1}^{q_1} dx f(x-\mathrm{R}) + \int_{p_2}^{q_2} dx f(x-\mathrm{R}) \ldots + \int_{p_n}^{q_n} dx f(x-\mathrm{R}) = \int_{p}^{q} dv f(v),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $q_1, q_2, \ldots, q_n$ étant respectivement les racines des équations

$$x - \mathrm{R} = p, \quad x - \mathrm{R} = q,$$

et les racines de l'équation

$$x - \mathrm{R} = v$$

étant toutes réelles pour toutes les valeurs de v qui se trouvent entre les limites p et q.

Troisièmement, le théorème s'applique à la réduction des intégrales définies multiples. Au point de vue de cette application, je l'ai communiqué à M. Cayley dès 1846.

RECHERCHES

SUR LA

THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'INDUCTION,

PAR F.-E. NEUMANN,

Professeur à l'Université de Kœnigsberg.

(Lu à l'Académie des Sciences de Berlin, le 27 octobre 1845.)

Traduit par M. A. BRAVAIS.

Lorsqu'une résultante magnétique ou électrodynamique, appliquée sur un élément d'un conducteur, vient à changer de grandeur, il se développe dans cet élément une force électromotrice qui, dans le cas où il appartient à un circuit fermé, fait naître dans ce circuit un courant électrique connu sous le nom de *courant d'induction, courant induit*. Nous supposerons que la rapidité avec laquelle varie la résultante considérée soit notablement moindre que la rapidité avec laquelle le courant induit se développe, de sorte qu'à un instant donné, le courant induit puisse être considéré comme conservant la même valeur pendant un laps de temps à la vérité très-court, mais suffisant pour que les lois de Ohm soient applicables. On voit que cette restriction range dans une catégorie à part les courants induits développés par des décharges électriques; ainsi les considérations qui vont suivre ne leur seront pas applicables.

L'élément induit peut être filiforme, lamellaire, ou de forme quelconque. Dans le premier cas, l'induction sera dite *linéaire*, et c'est l'examen de ce cas particulier qui forme le but du présent Mémoire. Il est d'ailleurs plus simple à traiter que les deux autres, puisqu'ici la route que doit suivre l'électricité est déjà définie, tandis qu'elle ne l'est pas d'avance, lorsque le conducteur est étendu suivant plusieurs dimensions. J'examinerai les lois relatives à ce dernier cas, dans un second Mémoire. Je ne parlerai pas non plus des courants développés par le changement de forme des conducteurs, ni de la réaction exercée par le courant induit sur le courant inducteur; mais les principes nécessaires à la solution de ces nouvelles questions ne diffèrent pas de ceux que nous allons développer [*].

[*] L'auteur place ici un résumé que le traducteur a cru devoir renvoyer à la fin du Mémoire.

§ I.

Pour déterminer la direction qu'adopte un courant induit, Lenz a établi la loi suivante : « Lorsqu'un conducteur métallique se meut dans le voisinage d'un courant » électrique ou d'un aimant, le sens du courant induit doit être tel, qu'en le supposant » établi dans ce conducteur, au repos, il détermine le circuit induit à se mouvoir » dans la direction opposée à celle du mouvement primitif, ce mouvement primitif » et son opposé étant supposés être les seuls dont le circuit induit soit susceptible. »

On sait, d'autre part, que « l'induction qui se produit alors, dans un temps très- » court et déterminé, est proportionnelle à la vitesse avec laquelle se meut le conduc- » teur. »

En combinant entre elles ces deux lois, on peut obtenir une loi unique de l'induction, comme je vais l'établir dans ce Mémoire.

Et d'abord la loi de Lenz peut s'énoncer de la manière suivante : « L'action électro- » dynamique exercée par le courant inducteur sur le courant induit, étant décomposée » suivant la direction du mouvement du circuit induit, est toujours négative (c'est-à-dire » contraire à ce dernier mouvement). »

Supposons pour un moment que tous les éléments du circuit induit aient des vitesses parallèles et égales à v: supposons que la composante de l'action électrodynamique suivant la commune direction du mouvement, le conducteur induit étant censé parcouru par un courant d'intensité 1, dont le sens a été arbitrairement fixé, ait la même valeur absolue pour chacun des éléments de ce conducteur; Ds étant la longueur d'un de ces éléments infiniment petits, CDs sera cette composante commune: pour la longueur totale λ du conducteur induit, toutes ces composantes se combineront en une seule égale à $C\lambda$ que nous nommerons C'. Si l'intensité du courant induit est égale à k, l'action électrodynamique suivant la direction du mouvement du conducteur sera kC'; k étant proportionnel à la vitesse v, on peut écrire

$$k = Lv, \quad kC' = LvC';$$

et puisque, d'après la loi de Lenz, la composante électrodynamique kC' est toujours opposée au mouvement, LvC' sera nécessairement une quantité négative.

On ne peut déterminer à priori la quantité L qui est évidemment une fonction de la composante C'; mais il résulte de la loi de Lenz que son signe change en même temps que celui de C', et la supposition la plus simple à faire consistera à écrire

$$L = -eC'.$$

Cela revient à admettre que l'intensité du courant induit est proportionnelle à la composante électrodynamique suivant le sens du mouvement. Les conséquences de cette hypothèse prouvent, en se vérifiant, qu'elle est suffisamment exacte.

Ainsi l'intensité du courant induit sera de la forme

$$k = Lv = -evC'.$$

En nommant l la *résistance totale* du circuit induit, qui est soumis, avons-nous dit, aux lois de Ohm, on voit que la force électromotrice qui lui a donné naissance sera

$$l \times -evC' = -elvC';$$

les quantités e, l dépendant toutes les deux de la nature et de la forme du conducteur induit, nous pouvons poser $el = \varepsilon$; nous aurons alors pour la force électromotrice du courant induit,

$$-\varepsilon v C',$$

et si nous revenons à l'élément infiniment petit Ds, nous devrons remplacer C' par CDs, de sorte que la force électromotrice qui réside dans cet élément aura pour valeur

$$-\varepsilon v \mathrm{CD}s.$$

Or il est à peu près évident que la force électromotrice développée dans chaque élément est indépendante de celle qui se développe dans l'élément voisin. Ainsi il devient inutile de supposer que tous les éléments du conducteur induit sont animés de la même vitesse v, et soumis à la même composante électrodynamique C; il suffit d'admettre que v est la vitesse de l'élément Ds, C la composante électrodynamique suivant la direction de cette vitesse, pour le même élément, et alors l'expression $-\varepsilon v\mathrm{CD}s$ représentera la force électromotrice spéciale à l'élément Ds.

Ainsi la loi générale de l'induction pourra s'énoncer de la manière suivante :

« Pour obtenir la force électromotrice qui s'établit dans l'élément Ds d'un conduc-
» teur qui se meut en présence d'un courant, multipliez une certaine constante ε par
» la vitesse de cet élément, et par la composante, suivant la direction inverse de
» cette vitesse, de la force électromagnétique qu'exercerait le courant inducteur sur
» l'élément Ds, supposé parcouru par un courant d'intensité 1. »

En nommant EDs la force électromotrice élémentaire de l'élément Ds du circuit induit, on pourra écrire

$$\mathrm{ED}s = -\varepsilon v \mathrm{CD}s. \tag{1}$$

Faraday et Lenz ont montré que cette constante ε restait la même, quelles que soient la forme et la nature du conducteur induit; ainsi sa valeur numérique dépend seulement des unités adoptées pour la longueur, le temps et l'intensité des courants. Cependant certains phénomènes prouvent que l'induction n'est pas aussi instantanée que la cause qui l'a produite, de sorte que la constante ε est, jusqu'à un certain point, une fonction du temps. J'éclaircirai cette partie de la question en traitant de l'induction dans les corps étendus suivant deux ou trois dimensions : dans les conducteurs à petite section, on peut se dispenser d'avoir égard à cette circonstance.

§ II.

Dans un circuit fermé et composé de conducteurs linéaires, je désigne par s la distance d'une tranche de longueur Ds à un point fixe de ce circuit pris pour origine :

la force électromotrice développée dans cette tranche, à l'époque t, est EDs, E étant à la fois une fonction de l'arc s et du temps t. Si E était indépendant du temps, tout serait constant dans le circuit; les lois de Ohm seraient applicables, et en appelant w la résistance totale du circuit, l'intensité du courant induit serait

$$\frac{1}{w}\int EDs,$$

l'intégrale étant étendue à tout le circuit.

Je vais démontrer que cette formule est encore applicable dans le cas où E varie avec le temps, pourvu que cette variation ne soit pas extrêmement rapide: la vitesse d'écoulement de l'électricité pour une force électromotrice égale à 1 sera représentée par k; elle sera supposée très-grande, et la même dans toutes les parties du circuit.

On doit concevoir que l'induction agit en produisant à l'époque t, dans l'élément Ds, une tension électrique U, laquelle sera

$$U+\frac{dU}{ds}Ds$$

dans l'élément voisin : la différence de ces deux tensions produit une force électromotrice induite E, c'est-à-dire une tendance du fluide à se mouvoir du lieu de la plus forte tension au lieu de la plus faible, de sorte que l'on a

$$E=-\frac{dU}{ds},$$

et l'électricité qui va traverser la section q de l'élément Ds pendant l'unité de temps sera

$$-qk\frac{dU}{ds}.$$

D'autre part, soit u la tension électrique effective en Ds à l'époque t, u étant une fonction de s et de t; l'écoulement actuel d'électricité par la section q sera

$$-qk\frac{du}{ds};$$

l'accumulation d'électricité dans l'élément Ds sera donc

$$qk\frac{d^2u}{ds^2}Ds.$$

En ajoutant l'effet de l'induction à l'époque t, l'électricité de Ds devra être augmentée de

$$qk\frac{d^2U}{ds^2}Ds=-qk\frac{dE}{ds}Ds.$$

Ainsi l'augmentation effective d'électricité, dans le cylindre de longueur Ds et de section q, sera

$$qk\left(\frac{d^2u}{ds^2}-\frac{dE}{ds}\right)Ds.$$

Mais il est visible, d'autre part, que cette augmentation peut être représentée par

$$q\,\mathrm{D}s\,\frac{du}{dt},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{du}{dt} = k\left(\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{d\mathrm{E}}{ds}\right),$$

où E est une fonction supposée connue de t et de s.

Lorsque u aura été déterminée par cette équation, la quantité d'électricité qui traverse la section q dans l'unité de temps, c'est-à-dire la force du courant, sera

$$-kq\left(\frac{du}{ds} - \mathrm{E}\right).$$

L'intégrale complète de la précédente équation se compose de deux parties dont l'une est l'intégrale de

$$\frac{du}{dt} = k\,\frac{d^2u}{ds^2},$$

et dont la seconde dépend de la forme de la fonction E. La première partie peut se développer en série suivant les puissances négatives de e^{kt}, e étant la base du système népérien, et elle s'évanouit pour des valeurs sensibles de t, à cause de la grandeur du nombre k. La seconde partie peut se développer suivant les puissances négatives de k, sous la forme

$$u = a + bs + \int \mathrm{E}\mathrm{D}s + \frac{1}{k}\int\!\!\int\!\!\int \frac{d\mathrm{E}}{dt}\,\mathrm{D}s^3 + \frac{1}{k^2}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{d^2\mathrm{E}}{dt^2}\,\mathrm{D}s^5 + \ldots,$$

a et b étant deux constantes arbitraires. Si donc E ne change pas de valeur extrêmement vite avec le temps, c'est-à-dire si $\frac{d\mathrm{E}}{dt}$ n'a pas une grandeur comparable à celle du nombre k, on pourra écrire

$$u = a + bs + \int \mathrm{E}\mathrm{D}s.$$

Le conducteur étant fermé et de longueur L, la tension u doit être la même pour $s = 0$ et pour $s = \mathrm{L}$; d'où l'on déduit

$$0 = b\mathrm{L} + \int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{E}\mathrm{D}s,$$

équation qui détermine b. On a ainsi pour l'intensité du courant,

$$-qk\left(\frac{du}{ds} - \mathrm{E}\right) = -qkb = \frac{qk}{\mathrm{L}}\int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{E}\mathrm{D}s.$$

Cette formule est précisément celle que l'on déduirait de la loi de Ohm; puisque

$\int_0^L \mathrm{E}\,\mathrm{D}s$ est la somme des forces électromotrices, et que $\frac{L}{qk}$ représente celle des résistances. A la vérité, j'ai supposé le conducteur homogène et d'égale section dans toute son étendue; mais les conditions contraires n'altéreraient pas le résultat que nous venons d'obtenir.

§ III.

Il résulte des deux précédents paragraphes que l'intensité du courant induit peut s'exprimer par l'intégrale

$$-\varepsilon\varepsilon' \mathrm{S}.v\mathrm{C}\mathrm{D}s,$$

ε' étant le quotient de l'unité par la résistance totale du conducteur induit, et l'intégrale S devant être étendue à tout ce conducteur.

Nous mesurerons la force du courant par l'action qu'il exerce en un temps donné, par exemple sur une aiguille magnétique. Le coefficient constant ε sera déterminé en opérant sur un courant d'induction qui ne varie pas avec le temps, et en égalant l'expression ci-dessus à l'effet total produit dans l'unité de temps.

Lorsque le courant induit variera avec le temps, l'action qui mesure son énergie sera, pendant l'élément de temps dt,

$$(1) \qquad -\varepsilon\varepsilon' dt\, \mathrm{S}.v\mathrm{C}\mathrm{D}s;$$

et entre les époques t_0, t_1, elle sera

$$(2) \qquad -\varepsilon\varepsilon' \int_{t_0}^{t_1} dt\, \mathrm{S}.v\mathrm{C}\mathrm{D}s.$$

Je nommerai l'expression (1) l'action momentanée du courant (*differential Ström*), et je la désignerai par la lettre D. Je représenterai par J l'expression (2); ce sera l'action finie du courant (*integral Ström*): c'est ordinairement cette dernière action qui est mesurée.

Ces deux expressions peuvent se mettre sous une autre forme. Nommons w l'arc de la route parcourue par le milieu de l'élément Ds; on aura

$$v = \frac{dw}{dt},$$

et ainsi

$$(3) \qquad \mathrm{D} = -\varepsilon\varepsilon' \mathrm{S}.\mathrm{C}dw\mathrm{D}s,$$

$$(4) \qquad \mathrm{J} = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} \mathrm{S}.\mathrm{C}dw\mathrm{D}s,$$

w_0 et w_1 étant les valeurs de w correspondant à $t = t_0$, $t = t_1$.

Ainsi l'action momentanée peut être considérée comme se rapportant au chemin parcouru dw, et l'action finie comme se rapportant au chemin compris entre w_0 et w_1. Leurs valeurs ne dépendent donc pas de la vitesse de transport du circuit, mais seulement de la longueur des chemins parcourus.

Le produit $\varepsilon C dw Ds$ représente la vitesse virtuelle (*virtuelle Moment*) de la force électrodynamique que l'inducteur exercerait sur l'élément Ds, supposé parcouru par un courant d'intensité ε : je le nomme *moment virtuel de l'inducteur*. La force électromotrice du courant momentané est la somme de ces moments virtuels, pris avec le signe —, dans toute l'étendue du circuit induit, c'est-à-dire $-\varepsilon S.C dw Ds$; mais cette somme représente, comme on sait, la demi-perte de force vive dans l'instant dt : ainsi on peut dire que « la force électromotrice de l'action finie du courant est égale à la demi-perte de force vive que le circuit induit parcouru par le courant ε éprouverait par suite de l'action électrodynamique du courant inducteur, en se mouvant de w_0 à w_1. »

Lorsque le circuit induit, au lieu d'être parcouru par le courant ε, le sera par le courant

$$-\varepsilon\varepsilon' S.v C Ds,$$

la perte de force vive dans le temps dt sera

$$(2\varepsilon S.C dw Ds)(-\varepsilon' S.v C Ds) = -2\varepsilon\varepsilon' dt\,(S.v C Ds)^2.$$

Je désignerai par x, y, z les trois coordonnées rectangulaires de l'élément Ds, et ses projections sur les axes par Dx, Dy, Dz; par dx, dy, dz les projections, sur les mêmes axes, du chemin dw parcouru dans le temps dt : les composantes de l'action électrodynamique de l'inducteur agissant sur l'élément Ds supposé parcouru par un courant 1 seront représentées par

$$X_\sigma Ds,\quad Y_\sigma Ds,\quad Z_\sigma Ds.$$

Ces composantes seront positives, si elles agissent dans le sens des coordonnées positives croissantes.

On a alors

$$CDs = Ds\left(X_\sigma \frac{dx}{dw} + Y_\sigma \frac{dy}{dw} + Z_\sigma \frac{dz}{dw}\right).$$

Les équations (3) et (4) deviennent ainsi

$$D = -\varepsilon\varepsilon' S.Ds(X_\sigma dx + Y_\sigma dy + Z_\sigma dz), \tag{5}$$

$$J = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S.Ds\,(X_\sigma dx + Y_\sigma dy + Z_\sigma dz). \tag{6}$$

Le signe S se rapporte aux divers éléments du circuit induit, le signe $\int$ aux éléments de la route parcourue.

Si le circuit induit se meut parallèlement à lui-même, dx, dy, dz sont les mêmes dans tout le circuit, et l'on peut écrire

$$(7)\qquad J = -\varepsilon\varepsilon'\int_{w_0}^{w_1}(dx\,\mathrm{S}.\mathrm{X}_\sigma \mathrm{D}s + dy\,\mathrm{S}.\mathrm{Y}_\sigma \mathrm{D}s + dz\,\mathrm{S}.\mathrm{Z}_\sigma \mathrm{D}s).$$

Si la quantité sous le signe $\int$ est la différentielle exacte d'une fonction de x, y, z que je représenterai par V, en sorte que l'on ait

$$(8)\qquad d\mathrm{V} = dx\,\mathrm{S}.\mathrm{X}_\sigma \mathrm{D}s + dy\,\mathrm{S}.\mathrm{Y}_\sigma \mathrm{D}s + dz\,\mathrm{S}.\mathrm{Z}_\sigma \mathrm{D}s,$$

en appelant V_{w_0}, V_{w_1} les valeurs de cette fonction pour les positions initiale et finale du conducteur mobile, on aura

$$(9)\qquad J = -\varepsilon\varepsilon'(\mathrm{V}_{w_1} - \mathrm{V}_{w_0}).$$

Posons alors $\varepsilon\mathrm{V} = p$, p étant un paramètre arbitraire; cette dernière équation sera celle de la surface de niveau d'un fluide de densité ε sollicité en chaque point par la résultante des forces

$$\mathrm{S}.\mathrm{X}_\sigma \mathrm{D}s,\quad \mathrm{S}.\mathrm{Y}_\sigma \mathrm{D}s,\quad \mathrm{S}.\mathrm{Z}_\sigma \mathrm{D}s,$$

et p sera la pression du fluide, constante sur une même surface de niveau, mais variable de l'une des surfaces à sa voisine.

On peut écrire alors

$$(10)\qquad J = -\varepsilon'(p_{w_1} - p_{w_0}),$$

et l'on voit que, si la condition (8) est satisfaite, « la force électromotrice de l'action finie du courant sera égale à la différence des pressions sur la surface de niveau initiale, et sur la surface finale, » et cette force sera indépendante de la route suivie par le conducteur pour passer de sa position initiale à sa position finale.

§ IV.

On doit se rappeler que C représente la somme algébrique des actions exercées par chaque élément de l'inducteur sur l'élément constant Ds du conducteur induit, supposé parcouru par un courant égal à 1, chacune de ces actions étant préalablement estimée suivant la direction du mouvement de l'élément induit.

Soient σ l'arc du circuit inducteur compté d'une origine fixe, Dσ un élément de cet arc, et cDσ l'action électrodynamique due à cet élément et qui entre dans la somme C. On voit qu'en remplaçant, dans $\varepsilon v\mathrm{C}\mathrm{D}s$, C par $c\mathrm{D}\sigma$, on aura

$$-\varepsilon v c\,\mathrm{D}s\,\mathrm{D}\sigma$$

pour la force électromotrice développée en Ds par l'influence de l'élément Dσ. En intégrant cette expression dans toute la longueur s du circuit induit, intégration que

je continuerai à représenter par le signe S, et en intégrant dans toute la longueur σ du circuit inducteur, intégration à laquelle j'attribuerai le signe Σ, on aura la force électromotrice totale engendrée par le circuit inducteur dans le circuit induit.

J'ai supposé jusqu'ici que le circuit inducteur était en repos, et le circuit induit, en mouvement. Or l'induction ne peut évidemment dépendre que du mouvement relatif des deux circuits; car, quels que soient leurs mouvements propres, on peut ramener l'un d'eux au repos en donnant au système un mouvement commun, de translation ou de rotation, convenablement choisi, et ce mouvement commun ne peut développer aucun phénomène d'induction, comme le prouve l'exemple de la terre et des circuits fermés et susceptibles d'induction qui sont placés à sa surface.

On n'altérera donc en rien l'apparence des phénomènes à observer, en supposant l'élément Ds en repos, et transportant à $D\sigma$ son mouvement, pris en sens contraire. Nous considérerons donc $D\sigma$ comme se mouvant avec une vitesse v, v étant actuellement fonction de σ. La force électromotrice sera maintenant

$$+\varepsilon v c Ds\, D\sigma,$$

expression dans laquelle le facteur $cDs\, D\sigma$ représente l'action électrodynamique exercée par $D\sigma$ sur l'unité positive de courant en Ds, décomposée parallèlement au mouvement de $D\sigma$, et suivant le sens de ce mouvement.

En nommant γ la réaction simultanée de Ds sur $D\sigma$ décomposée suivant la même direction, on a $\gamma = -c$, et la force électromotrice développée en Ds par $D\sigma$ deviendra

$$-\varepsilon v \gamma Ds D\sigma.$$

En intégrant, relativement à toute la longueur de l'arc s, cette expression dans laquelle γ est le seul facteur variable, nous pourrons représenter l'intégrale $S.\gamma Ds$ par Γ, et la force électromotrice développée par l'élément $D\sigma$ dans tout le circuit du conducteur induit sera

$$(1) \qquad -\varepsilon v \Gamma D\sigma = E' D\sigma.$$

On voit que Γ est la composante, parallèle au mouvement de l'inducteur, de l'action électrodynamique exercée par le conducteur induit parcouru par l'unité de courant sur l'élément $D\sigma$.

En étendant l'intégrale de la formule (1) à tout le circuit inducteur, on aura, comme ci-dessus, pour l'expression de l'action momentanée, que je nommerai D', et qui correspond à l'élément de temps dt,

$$(2) \qquad D' = -\varepsilon\varepsilon' dt\, \Sigma\, v\Gamma D\sigma,$$

et pour celle de l'action finie du même courant, ou J',

$$(3) \qquad J' = -\varepsilon\varepsilon' \int_{t_0}^{t_1} dt\, \Sigma . v\Gamma D\sigma.$$

En appelant w l'arc décrit par le milieu de $D\sigma$ et désignant l'élément de route par dw,

on pourra mettre ces expressions sous la forme

$$(4)\qquad D' = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\Gamma dw D\sigma,$$

$$(5)\qquad J' = -\varepsilon\varepsilon'\int_{w_0}^{w_1}\Sigma.\Gamma dw D\sigma.$$

Si l'on compare la formule (1) de ce paragraphe avec la formule (1) du § I, on voit que, dans celle-là, CDs, et dans celle-ci, $\Gamma D\sigma$ représentent la composante efficace [*] de l'action électrodynamique du conducteur en repos sur l'élément mobile, le conducteur induit étant toujours censé parcouru par un courant égal à l'unité.

Je vais démontrer maintenant que, si les circuits sont fermés, il se développera la même force électromotrice, quel que soit celui des deux conducteurs qui se meuve par rapport à l'autre.

Je représenterai par ξ, η, ζ les coordonnées courantes du milieu de l'élément $D\sigma$ supposé mobile; $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ seront les projections, sur les trois axes coordonnés, de l'élément de route dw. Les trois composantes de l'action électrodynamique exercée par le conducteur induit en repos et parcouru par l'unité de courant sur l'élément $D\sigma$ du conducteur mobile, seront

$$X_{,}D\sigma,\quad Y_{,}D\sigma,\quad Z_{,}D\sigma.$$

On aura alors

$$\Gamma D\sigma = \left(X_{,}\frac{d\xi}{dw} + Y_{,}\frac{d\eta}{dw} + Z_{,}\frac{d\zeta}{dw}\right) D\sigma,$$

et les équations (4) et (5) deviennent

$$(6)\qquad D' = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.(X_{,}d\xi + Y_{,}d\eta + Z_{,}d\zeta) D\sigma,$$

$$(7)\qquad J' = -\varepsilon\varepsilon'\int_{w_0}^{w_1}\Sigma.(X_{,}d\xi + Y_{,}d\eta + Z_{,}d\zeta) D\sigma.$$

Soient maintenant $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ les coordonnées de l'élément Ds. Les *accents placés au bas des lettres* indiquent ici et indiqueront dans la suite de ce Mémoire que ces coordonnées se rapportent à un conducteur *en repos;* si ce conducteur devenait mobile, les axes de ces mêmes coordonnées seraient censés entraînés dans ce mouvement, de sorte que $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ conserveraient leurs valeurs. Les mêmes coordonnées non affectées d'accents se rapportent au conducteur mobile et à des axes fixes dans l'espace; elles changent pendant le mouvement du conducteur.

Je representerai par $RDsD\sigma$ la valeur absolue de l'action électrodynamique de l'unité de courant en Ds sur l'élément $D\sigma$ parcouru par un courant inducteur égal à j. D'après les lois d'Ampère, on a

$$(8)\qquad R = \frac{j}{r^2}\left(r\frac{D^2 r}{DsD\sigma} - \frac{1}{2}\frac{Dr}{Ds}\cdot\frac{Dr}{D\sigma}\right),$$

[*] Je désignerai sous le nom de *composante efficace* la composante d'une action électrodynamique suivant la direction du mouvement propre de l'élément mobile. A. B.

r étant la distance qui sépare Ds de $D\sigma$, de sorte que l'on a

(9) $$r^2 = (x_{,} - \xi)^2 + (y_{,} - \eta)^2 + (z_{,} - \zeta)^2.$$

Je nomme

$$XDsD\sigma, \quad YDsD\sigma, \quad ZDsD\sigma,$$

les trois composantes de cette force, de sorte que l'on ait

$$X = -\frac{(x_{,} - \xi)}{r}R, \quad Y = -\frac{(y_{,} - \eta)}{r}R, \quad Z = -\frac{(z_{,} - \zeta)}{r}R.$$

Il en résulte

$$X_{,} = -S.\frac{x_{,} - \xi}{r}RDs, \quad Y_{,} = -S.\frac{y_{,} - \eta}{r}RDs, \quad Z_{,} = -S.\frac{z_{,} - \zeta}{r}RDs.$$

Comme $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ sont des grandeurs constantes, on a, en faisant varier t,

$$(x_{,} - \xi)\,d\xi + (y_{,} - \eta)\,d\eta + (z_{,} - \zeta)\,d\zeta = -rdr;$$

donc

$$X_{,}d\xi + Y_{,}d\eta + Z_{,}d\zeta = S.RdrDs,$$

et, par suite,

(10) $$D' = -ii'\Sigma S.RdrDsD\sigma,$$

(11) $$J' = -ii'\int_{r_0}^{r_1} \Sigma S.RdrDsD\sigma.$$

Les signes d et $\int$ se rapportent toujours au changement de position du conducteur mobile, les signes S et Σ à l'intégration le long de l'arc s ou le long de l'arc σ, le signe D à la différentiation par rapport à ces mêmes arcs.

Soient $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ les coordonnées d'un point du conducteur mobile par rapport à des axes mobiles avec lui; $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ seront indépendants du temps, et l'on aura

(12) $$\left\{\begin{aligned} \xi &= \alpha + a\xi_{,} + b\eta_{,} + c\zeta_{,}, \\ \eta &= \beta + a_{,}\xi_{,} + b_{,}\eta_{,} + c_{,}\zeta_{,}, \\ \zeta &= \gamma + a_{,,}\xi_{,} + b_{,,}\eta_{,} + c_{,,}\zeta_{,}. \end{aligned}\right.$$

Les quantités a, b, c, $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, etc., sont soumises à des relations connues; elles sont d'ailleurs, ainsi que α, β, γ, des fonctions du temps déterminées par la nature du mouvement du conducteur mobile.

Ainsi, en différentiant par rapport au temps, on aura

$$\begin{aligned} d\xi &= d\alpha + \xi_{,}da + \eta_{,}db + \zeta_{,}dc, \\ d\eta &= \text{etc...}, \end{aligned}$$

et, en différentiant par rapport à l'arc σ,

$$D\xi = aD\xi_{,} + bD\eta_{,} + cD\zeta_{,},$$
$$D\eta = \text{etc.}\ldots$$

La substitution des valeurs de ξ, η, ζ dans l'équation (9) donne

$$\begin{aligned} r^2 = & (x_{,} - \alpha)^2 + (y_{,} - \beta)^2 + (z_{,} - \gamma)^2 + \xi_{,}^2 + \eta_{,}^2 + \zeta_{,}^2 \\ & - 2\xi_{,}[a(x_{,} - \alpha) + a_{,}(y_{,} - \beta) + a_{,,}(z_{,} - \gamma)] \\ & - 2\eta_{,}[b(x_{,} - \alpha) + b_{,}(y_{,} - \beta) + b_{,,}(z_{,} - \gamma)] \\ & - 2\zeta_{,}[c(x_{,} - \alpha) + c_{,}(y_{,} - \beta) + c_{,,}(z_{,} - \gamma)]. \end{aligned}$$

Si, au contraire, c'est le courant induit qui se meut, l'inducteur restant fixe, on a, au lieu de l'équation (9),

$$r^2 = (x - \xi_{,})^2 + (y - \eta_{,})^2 + (z - \gamma_{,})^2;$$

et si l'on veut exprimer x en $x_{,}$, y en $y_{,}$, z en $z_{,}$, il faut, dans les équations (12), remplacer ξ, η, ζ, $\xi_{,}$, $\nu_{,}$, $\zeta_{,}$ par $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, x, y, z: on en déduit

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= (x_{,} - \alpha)\,a + (y_{,} - \beta)\,a_{,} + (z_{,} - \gamma)\,a_{,,}, \\ y &= (x_{,} - \alpha)\,b + (y_{,} - \beta)\,b_{,} + (z_{,} - \gamma)\,b_{,,}, \\ z &= (x_{,} - \alpha)\,c + (y_{,} - \beta)\,c_{,} + (z_{,} - \gamma)\,c_{,,}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on substitue ces valeurs de x, y, z dans l'expression de r^2, après le développement, on retombe sur la même expression que ci-dessus.

Ainsi r a la même valeur dans les deux cas; il en est de même de ses coefficients différentiels par rapport à s et à σ: donc l'action électrodynamique R est la même. L'élément dr conservant aussi la même grandeur, $\mathrm{R}dr\mathrm{D}s\mathrm{D}\sigma$ ne change pas: donc, si dans les deux cas les limites d'intégration par rapport à s et à σ restent les mêmes, D' conservera dans l'équation (10) la même valeur, et la force électromotrice engendrée, ou $\frac{\mathrm{D}'}{\varepsilon'}$, sera la même, quel que soit le conducteur en repos.

Ainsi, quel que soit celui des deux conducteurs dans lequel on fasse circuler le courant d'intensité j, l'autre étant parcouru par un courant égal à 1, la force électromotrice développée par l'induction aura la même valeur dans les deux cas.

Donc « la force électromotrice développée par induction dans un circuit passif placé » en présence d'un circuit actif parcouru par le courant j, reste la même quel que soit » celui des deux circuits qui est le circuit actif, et aussi quel que soit celui des deux » qui est mobile, pourvu que le mouvement relatif des deux circuits reste le même. » L'intensité du courant induit successivement dans l'un et dans l'autre des deux cir- » cuits est alors inversement proportionnelle aux résistances de ces circuits. »

Cette loi peut aussi s'appliquer à des portions de circuits; mais une partie quelconque du circuit mobile ne peut rester inactive qu'autant qu'elle participe au repos

du circuit immobile; et de même une partie du circuit fixe ne peut rester inactive que si elle participe au mouvement général du circuit mobile : alors on peut considérer l'un des circuits comme réduit à sa partie active, et comme n'étant pas fermé sur lui-même. On connaît des exemples de dispositions semblables; Weber a fait connaître un de ces modes dans ses expériences sur l'induction unipolaire. Mais dans tous les cas pareils, où l'un des deux conducteurs se compose de deux parties, l'une fixe, l'autre mobile, il faut, si l'on transporte le mouvement de l'un des deux conducteurs à l'autre, n'appliquer la loi précédente que dans le cas où les limites de l'intégration, par rapport à s ou à σ, restent les mêmes après ce changement.

Cette loi n'est pas seulement applicable au cas de deux circuits; elle l'est aussi à celui de deux systèmes de circuits, l'un fixe et l'autre mobile.

Montrons, en terminant, que les formules (5) et (6) du paragraphe précédent dérivent facilement des formules (6) et (7) de ce paragraphe. De ces dernières, on déduit d'abord les formules (10) et (11). En substituant dans ces dernières la valeur de r, relative au cas où σ est fixe, et où s devient mobile, savoir,

$$r^2 = (x-\xi_{,})^2 + (y-\eta_{,})^2 + (z-\zeta_{,})^2,$$

nous aurons

$$dr = \left(\frac{x-\xi_{,}}{r}\right) dx + \left(\frac{y-\eta_{,}}{r}\right) dy + \left(\frac{z-\zeta_{,}}{r}\right) dz,$$

$$\mathrm{D}' = -\varepsilon\varepsilon' \Sigma \mathrm{S}.\mathrm{D}s\,\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{R}\left(\frac{x-\xi_{,}}{r} dx + \frac{y-\eta_{,}}{r} dy + \frac{z-\zeta_{,}}{r} dz\right).$$

Mais $\mathrm{X}_\sigma \mathrm{D}s$, $\mathrm{Y}_\sigma \mathrm{D}s$, $\mathrm{Z}_\sigma \mathrm{D}s$ sont les composantes de l'action électrodynamique exercée par l'arc σ sur $\mathrm{D}s$, et l'on a

$$\mathrm{X}_\sigma = \Sigma.\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{R}\,\frac{x-\xi_{,}}{r},$$

$$\mathrm{Y}_\sigma = \Sigma.\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{R}\,\frac{y-\eta_{,}}{r},$$

$$\mathrm{Z}_\sigma = \Sigma.\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{R}\,\frac{z-\zeta_{,}}{r}.$$

Donc

$$\mathrm{D}' = -\varepsilon\varepsilon' \mathrm{S}.\mathrm{D}s\,(\mathrm{X}_\sigma dx + \mathrm{Y}_\sigma dy + \mathrm{Z}_\sigma dz);$$

ce qui est la formule (5) du paragraphe précédent. Il en serait de même pour la formule (6) de ce paragraphe.

§ V.

Les considérations précédentes s'appliquent à l'induction développée par le pôle d'un aimant, si, conformément aux idées d'Ampère, on considère un pôle d'aimant comme le point de départ d'un solénoïde dont l'autre extrémité est à l'infini. Des lois de l'induction magnétique unipolaire, on déduit celles de l'induction par les aimants, celles de l'induction produite par l'aimantation et la désaimantation, et même celles de

l'induction galvanique ordinaire, attendu que, d'après une autre loi d'Ampère, un courant fermé peut toujours être assimilé à un certain système de pôles magnétiques.

Lorsqu'un solénoïde est en mouvement par rapport à un conducteur fixe, on emploiera, pour déterminer l'action soit momentanée, soit finie du courant induit, les formules (2) et (3) du paragraphe précédent, et l'on prendra, par rapport à l'arc σ du solénoïde, l'intégrale de $\sigma \Gamma D\sigma$. Mais on peut substituer au mouvement du solénoïde le mouvement inverse du conducteur. Cela est évident pour le cas d'un conducteur fermé. Si le circuit n'est pas complet, il devra satisfaire aux conditions déjà énoncées à la page 125, d'après lesquelles la substitution précédente est permise; une portion de ce conducteur doit alors être liée au solénoïde, de manière à participer à son mouvement si le solénoïde se meut, et à rester fixe dans le cas où le solénoïde serait fixe lui-même.

Je vais démontrer maintenant que, si le conducteur induit forme un circuit complet, l'induction ne dépend que des mouvements des deux pôles du solénoïde; que, si le circuit est incomplet, l'induction se compose de deux termes dont l'un dépend seulement des mouvements des deux pôles, tandis que l'autre terme dépend du mouvement des deux extrémités du conducteur relativement au solénoïde considéré comme immobile.

Nous allons donc considérer un conducteur se mouvant dans le voisinage d'un solénoïde fixe, et unipolaire, son autre pôle étant situé à l'infini.

Les signes s, Ds, x, y, z, Dx, Dy, Dz se rapporteront au conducteur induit et conserveront leurs significations antérieures. Le chemin de l'élément Ds sera désigné par w, l'élément de la route par dw, et ses projections par dx, dy, dz. Les lettres $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ seront les coordonnées du pôle du solénoïde.

L'action finie du courant induit sera, d'après la formule (6) du § III,

$$(1) \qquad J = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} \mathrm{S}.Ds\,(X_\sigma dx + Y_\sigma dy + Z_\sigma dz).$$

D'après des formules connues d'Ampère, les composantes de l'action d'un tel pôle de solénoïde sur l'élément Ds parcouru par un courant égal à 1, sont

$$(2) \qquad \begin{cases} X_\sigma Ds = \dfrac{\varkappa'}{r^3}\left[(z-\zeta_{,})\,Dy - (y-\eta_{,})\,Dz\right], \\[2ex] Y_\sigma Ds = \dfrac{\varkappa'}{r^3}\left[(x-\xi_{,})\,Dz - (z-\zeta_{,})\,Dx\right], \\[2ex] Z_\sigma Ds = \dfrac{\varkappa'}{r^3}\left[(y-\eta_{,})\,Dx - (x-\xi_{,})\,Dy\right]; \end{cases}$$

on a d'ailleurs

$$(3) \qquad r^2 = (x-\xi_{,})^2 + (y-\eta_{,})^2 + (z-\zeta_{,})^2.$$

Quant au facteur constant $\varkappa'$, il a pour valeur $\frac{1}{2}\alpha\lambda j$, j étant l'intensité du courant qui parcourt les circuits du solénoïde, λ l'aire constante de l'un de ces circuits, et α le nombre de circuits partiels contenu dans une longueur prise sur l'axe du solénoïde et égale à l'unité.

Soient maintenant $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ les coordonnées fixes de l'élément Ds, par rapport à des axes mobiles avec le conducteur; on aura

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha + ax_{,} + by_{,} + cz_{,}, \\ y = \beta + a_{,}x_{,} + b_{,}y_{,} + c_{,}z_{,}, \\ z = \gamma + a_{,,}x_{,} + b_{,,}y_{,} + c_{,,}z_{,}. \end{array}\right.$$

α, β, γ sont des fonctions du temps, d'ailleurs indépendantes entre elles; a, b, c, $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, $a_{,,}$, $b_{,,}$, $c_{,,}$ sont aussi des fonctions du temps liées entre elles par six équations connues.

On a alors, en différentiant par rapport au temps,

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} dx = d\alpha + x_{,}da + y_{,}db + z_{,}dc, \\ dy = d\beta + x_{,}da_{,} + y_{,}db_{,} + z_{,}dc_{,}, \\ dz = d\gamma + x_{,}da_{,,} + y_{,}db_{,,} + z_{,}dc_{,,}, \end{array}\right.$$

et, en différentiant par rapport à l'arc s,

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} Dx = a\,Dx_{,} + b\,Dy_{,} + c\,Dz_{,}, \\ Dy = a_{,}Dx_{,} + b_{,}Dy_{,} + c_{,}Dz_{,}, \\ Dz = a_{,,}Dx_{,} + b_{,,}Dy_{,} + c_{,,}Dz_{,}. \end{array}\right.$$

Éliminons $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ des équations (5) au moyen des équations (4); nous aurons

$$\begin{array}{l} dx = d\alpha + (z - \gamma)\,dM - (y - \beta)\,dN, \\ dy = d\beta + (x - \alpha)\,dN - (z - \gamma)\,dL, \\ dz = d\gamma + (y - \beta)\,dL - (x - \alpha)\,dM, \end{array}$$

en faisant, pour abréger,

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} dL = a_{,}da_{,,} + b_{,}db_{,,} + c_{,}dc_{,,} = -(a_{,,}da_{,} + b_{,,}db_{,} + c_{,,}dc_{,}), \\ dM = a_{,,}da + b_{,,}db + c_{,,}dc = -(ada_{,,} + bdb_{,,} + cdc_{,,}), \\ dN = ada_{,} + bdb_{,} + cdc_{,} = -(a_{,}da + b_{,}db + c_{,}dc). \end{array}\right.$$

Je pose maintenant

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} d\alpha + (\zeta_{,} - \gamma)\,dM - (\eta_{,} - \beta)\,dN = d\lambda, \\ d\beta + (\xi_{,} - \alpha)\,dN - (\zeta_{,} - \gamma)\,dL = d\mu, \\ d\gamma + (\eta_{,} - \beta)\,dL - (\xi_{,} - \alpha)\,dM = d\nu. \end{array}\right.$$

Les équations (5) deviennent

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} dx = d\lambda + (z - \zeta_{,})\,dM - (y - \eta_{,})\,dN, \\ dy = d\mu + (x - \xi_{,})\,dN - (z - \zeta_{,})\,dL, \\ dz = d\nu + (y - \eta_{,})\,dL - (x - \xi_{,})\,dM. \end{array}\right.$$

On sait, par la théorie mécanique des mouvements de rotation des corps, que dL

représente l'angle de rotation autour de l'axe des x pendant le temps dt; que dM, dN ont la même signification par rapport aux axes des y et des z. On voit, par les équations (8), que $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ représentent les petits déplacements qu'éprouverait, parallèlement aux x, y, z, le pôle $(\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,})$, s'il participait au mouvement du conducteur.

On voit aussi que les quantités dx, dy, dz se composent : 1° des déplacements $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, du pôle du solénoïde supposé pour un instant lié avec le conducteur; 2° des déplacements produits par la rotation simultanée du conducteur autour de ce pôle.

La substitution de ces valeurs de dx, dy, dz dans le second membre de l'équation (1) le décompose en deux parties, l'une dépendante de $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, l'autre dépendante de la rotation. Je représente la première de ces parties par J_p, la seconde par J_d.

On trouve ainsi

$$(10)\qquad J_p = -\varepsilon\varepsilon'\int_{w_0}^{w_1} S.Ds\,(X_\sigma d\lambda + Y_\sigma d\mu + Z_\sigma d\nu),$$

$$(11)\qquad J_d = -\varepsilon\varepsilon'\int_{w_0}^{w_1} S.Ds\left\{\begin{array}{l} X_\sigma[(z-\zeta_{,})\,dM - (y-\eta_{,})\,dN] \\ + Y_\sigma[(x-\xi_{,})\,dN - (z-\zeta_{,})\,dL] \\ + Z_\sigma[(y-\eta_{,})\,dL - (x-\xi_{,})\,dM] \end{array}\right\},$$

et

$$J = J_p + J_d.$$

Si le conducteur est simplement soumis à un mouvement de translation, on aura $J_d = 0$: s'il n'a qu'un mouvement de rotation autour du pôle du solénoïde, on aura, au contraire, $J_p = 0$.

Développons J_p en y substituant les valeurs de $X_\sigma Ds$, $Y_\sigma Ds$, $Z_\sigma Ds$, déduites des équations (2); puis remplaçons Dx, Dy, Dz par leurs valeurs en $Dx_{,}$, $Dy_{,}$, $Dz_{,}$; nous aurons

$$(12)\qquad J_p = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\int S.(A Dx_{,} + B Dy_{,} + C Dz_{,}),$$

après avoir posé, pour abréger,

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{1}{r^3}\left\{\begin{array}{l} [(z-\zeta_{,})a_{,} - (y-\eta_{,})a_{,,}]\,d\lambda \\ + [(x-\xi_{,})a_{,,} - (z-\zeta_{,})a\,]\,d\mu \\ + [(y-\eta_{,})a - (x-\xi_{,})a_{,}\,]\,d\nu \end{array}\right\}, \\[2ex] B = \dfrac{1}{r^3}\{\text{la même expression, en y remplaçant } a \text{ par } b\}, \\[2ex] C = \dfrac{1}{r^3}\{\text{la même expression, en y remplaçant } a \text{ par } c\}. \end{array}\right.$$

Substituons dans ces équations les valeurs de x, y, z en $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, tirées des équations (4); le facteur entre parenthèses de la première des formules (13) deviendra

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} [(\gamma-\zeta_{,})a_{,} - (\beta-\eta_{,})a_{,,} + y_{,}(a_{,}b_{,,} - a_{,,}b_{,}) - z_{,}(a_{,,}c_{,} - a_{,}c_{,,})]\,d\lambda \\ + [(\alpha-\xi_{,})a_{,,} - (\gamma-\zeta_{,})a + y_{,}(a_{,,}b - ab_{,,}) - z_{,}(ac_{,,} - a_{,,}c)]\,d\mu \\ + [(\beta-\eta_{,})a - (\alpha-\xi_{,})a_{,} + y_{,}(ab_{,} - a_{,}b) - z_{,}(a_{,}c - ac_{,})]\,d\nu. \end{array}\right.$$

Or les quantités a, b, c, $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, $a_{''}$, $b_{''}$, $c_{''}$ sont liées par les relations

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{lll} a_{,}b_{''}-a_{''}b_{,}=c, & a_{''}c_{,}-a_{,}c_{''}=b, & b_{,}c_{''}-b_{''}c_{,}=a,\\ a_{''}b-ab_{''}=c_{,}, & ac_{''}-a_{''}c=b_{,}, & b_{''}c-bc_{''}=a_{,},\\ ab_{,}-a_{,}b=c_{''}, & a_{,}c-ac_{,}=b_{''}, & bc_{,}-b_{,}c=a_{''}. \end{array}\right.$$

A la vérité, dans le cas général, les seconds membres de ces neuf équations pourraient offrir quelquefois le signe —; mais si l'un des systèmes d'axes dérive de l'autre par un mouvement de rotation, les formules (15) sont toujours exactes.

Ainsi le facteur (14) se change en

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} [(\gamma-\zeta_{,})a_{,}-(\beta-\eta_{,})a_{''}+y_{,}c-z_{,}b]\,d\lambda\\ +[(\alpha-\xi_{,})a_{''}-(\gamma-\zeta_{,})a+y_{,}c_{,}-z_{,}b_{,}]\,d\mu\\ +[(\beta-\eta_{,})a-(\alpha-\xi_{,})a_{,}+y_{,}c_{''}-z_{,}b_{''}]\,d\nu. \end{array}\right.$$

Soient maintenant ξ, η, ζ les coordonnées du pôle par rapport aux axes de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, lesquelles varient avec le temps; on aura

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi=a(\xi_{,}-\alpha)+a_{,}(\eta_{,}-\beta)+a_{''}(\zeta_{,}-\gamma),\\ \eta=b(\xi_{,}-\alpha)+b_{,}(\eta_{,}-\beta)+b_{''}(\zeta_{,}-\gamma),\\ \zeta=c(\xi_{,}-\alpha)+c_{,}(\eta_{,}-\beta)+c_{''}(\zeta_{,}-\gamma). \end{array}\right.$$

On peut déduire de là les valeurs de $\alpha-\xi_{,}$, $\beta-\eta_{,}$, $\gamma-\zeta_{,}$ en fonction de ξ, η, ζ, les substituer dans la formule (16), et après les transformations fournies par les équations (15), cette dernière formule devient

$$\begin{array}{l} [c\,(y_{,}-\eta)-b\,(z_{,}-\zeta)]\,d\lambda\\ +[c_{,}(y_{,}-\eta)-b_{,}(z_{,}-\zeta)]\,d\mu\\ +[c_{''}(y_{,}-\eta)-b_{''}(z_{,}-\zeta)]\,d\nu. \end{array}$$

J'écris maintenant

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} ad\lambda+a_{,}d\mu+a_{''}d\nu=dl,\\ bd\lambda+b_{,}d\mu+b_{''}d\nu=dm,\\ cd\lambda+c_{,}d\mu+c_{''}d\nu=dn. \end{array}\right.$$

La quantité A se réduira à la forme

$$A=\frac{1}{r^3}[(y_{,}-\eta)\,dn-(z_{,}-\zeta)\,dm],$$

et l'on aura de même

$$B=\frac{1}{r^3}[(z_{,}-\zeta)\,dl-(x_{,}-\xi)\,dn],$$

$$C=\frac{1}{r^3}[(x_{,}-\xi)\,dm-(y_{,}-\eta)\,dl].$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (12) la change en

$$J_p = -\varepsilon\varepsilon' x' \int_{w_0}^{w_1} S \cdot \frac{1}{r^3} \left\{ \begin{array}{l} [(z_, - \zeta)\, Dy_, - (y_, - \eta)\, Dz_,]\, dl \\ + [(x_, - \xi)\, Dz_, - (z_, - \zeta)\, Dx_,]\, dm \\ + [(y_, - \eta)\, Dx_, - (x_, - \xi)\, Dy_,]\, dn \end{array} \right\}.$$

On doit se rappeler que $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ sont les déplacements absolus qu'éprouve le pôle du solénoïde supposé lié avec le conducteur s, par rapport aux axes des x, y, z. Les équations (18) montrent que dl, dm, dn sont les composantes de ce même déplacement dans l'espace par rapport aux positions actuelles des axes des $x_,$, $y_,$, $z_,$ supposés fixes. Or le déplacement absolu du pôle supposé entraîné par le solénoïde est précisément inverse du déplacement du pôle relativement au solénoïde supposé fixe, et puisque les composantes de ce dernier déplacement sont, d'après nos conventions, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, on doit avoir

$$dl = -d\xi, \quad dm = -d\eta, \quad dn = -d\zeta.$$

D'ailleurs on peut aussi obtenir ces dernières équations en combinant entre elles les équations (8) et (17).

Ceci posé, l'équation ci-dessus devient

$$(19) \qquad J_p = -\varepsilon\varepsilon' x' \int_{w_0}^{w_1} S \cdot \frac{1}{r^3} \left\{ \begin{array}{l} [(y_, - \eta)\, Dz_, - (z_, - \zeta)\, Dy_,]\, d\xi \\ + [(z_, - \zeta)\, Dx_, - (x_, - \xi)\, Dz_,]\, d\eta \\ + [(x_, - \xi)\, Dy_, - (y_, - \eta)\, Dx_,]\, d\zeta \end{array} \right\}.$$

Soient maintenant X_p, Y_p, Z_p les composantes de l'action électrodynamique exercée par tout le conducteur supposé fixe sur le pôle du solénoïde ; on aura, par les formules d'Ampère,

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_p = S \cdot \dfrac{x'}{r^3} [(y_, - \eta)\, Dz_, - (z_, - \zeta)\, Dy_,], \\ Y_p = S \cdot \dfrac{x'}{r^3} [(z_, - \zeta)\, Dx_, - (x_, - \xi)\, Dz_,], \\ Z_p = S \cdot \dfrac{x'}{r^3} [(x_, - \xi)\, Dy_, - (y_, - \eta)\, Dx_,]. \end{array} \right.$$

Donc

$$(21) \qquad J_p = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} (X_p\, d\xi + Y_p\, d\eta + Z_p\, d\zeta),$$

et l'action momentanée correspondante sera

$$(22) \qquad D_p = -\varepsilon\varepsilon' (X_p\, d\xi + Y_p\, d\eta + Z_p\, d\zeta).$$

On voit ainsi que « la force électromotrice engendrée par le mouvement de translation du conducteur est égale à la vitesse du pôle du solénoïde par rapport à ce

» conducteur multipliée par la composante efficace de l'action électrodynamique que » le conducteur parcouru par un courant d'intensité ε exercerait sur le pôle. »

Considérons maintenant cette partie de l'induction, due à la rotation, qui est représentée par la formule (11). En ordonnant cette formule par rapport aux quantités $d\mathrm{L}$, $d\mathrm{M}$, $d\mathrm{N}$, elle devient

$$(23)\qquad \mathrm{J}_d = -\varepsilon\varepsilon'\int \mathrm{S}.\mathrm{D}s \left\{ \begin{array}{l} [\mathrm{Z}_\sigma(y-\eta_{,}) - \mathrm{Y}_\sigma(z-\zeta_{,})]\, d\mathrm{L} \\ +[\mathrm{X}_\sigma(z-\zeta_{,}) - \mathrm{Z}_\sigma(x-\xi_{,})]\, d\mathrm{M} \\ +[\mathrm{Y}_\sigma(x-\xi_{,}) - \mathrm{X}_\sigma(y-\eta_{,})]\, d\mathrm{N} \end{array} \right\}.$$

Traitons d'abord le terme qui a $d\mathrm{L}$ pour facteur, savoir

$$-\varepsilon\varepsilon'\int \mathrm{S}.[\mathrm{Z}_\sigma(y-\eta_{,}) - \mathrm{Y}_\sigma(z-\zeta_{,})]\, d\mathrm{L}\,\mathrm{D}s,$$

et substituons-y les valeurs de Z_σ, Y_σ tirées des équations (2); ce terme devient

$$-\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\int \mathrm{S}\cdot\frac{1}{r^3}\left\{ \begin{array}{l} [(x-\xi_{,})^2 + (y-\eta_{,})^2 + (z-\zeta_{,})^2]\,\mathrm{D}x \\ -(x-\xi_{,})\,[(x-\xi_{,})\,\mathrm{D}x + (y-\eta_{,})\,\mathrm{D}y + (z-\zeta_{,})\,\mathrm{D}z] \end{array} \right\} d\mathrm{L}.$$

Or, si l'on différentie l'expression $\frac{x-\xi_{,}}{r}$ par rapport à l'arc s du conducteur induit, dont ξ, η, ζ ne dépendent pas, on trouve

$$\mathrm{D}\frac{x-\xi_{,}}{r} = \frac{1}{r^3}[r^2\,\mathrm{D}x - (x-\xi_{,})\,r\,\mathrm{D}r].$$

Ainsi, le terme que nous avons considéré est égal à

$$-\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\int \left[\frac{x-\xi_{,}}{r}\right] d\mathrm{L},$$

en représentant par $\left[\frac{x-\xi_{,}}{r}\right]$ la différence des deux valeurs qu'acquiert $\frac{x-\xi_{,}}{r}$ pour chacune des extrémités du conducteur; en opérant de même pour les termes en $d\mathrm{M}$, $d\mathrm{N}$, on aura

$$(24)\qquad \mathrm{J}_d = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\int\left\{ \left[\frac{x-\xi_{,}}{r}\right] d\mathrm{L} + \left[\frac{y-\eta_{,}}{r}\right] d\mathrm{M} + \left[\frac{z-\zeta_{,}}{r}\right] d\mathrm{N} \right\},$$

et

$$(25)\qquad \mathrm{D}_d = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\left\{ \left[\frac{x-\xi_{,}}{r}\right] d\mathrm{L} + \left[\frac{y-\eta_{,}}{r}\right] d\mathrm{M} + \left[\frac{z-\zeta_{,}}{r}\right] d\mathrm{N} \right\}.$$

Si le conducteur est fermé, les trois expressions $\left[\frac{x-\xi_{,}}{r}\right]$, $\left[\frac{y-\eta_{,}}{r}\right]$, $\left[\frac{z-\zeta_{,}}{r}\right]$ se réduisent à zéro, et cette partie de l'induction totale est nulle.

On déduit de là :

1°. Un conducteur fermé qui se meut dans le voisinage du pôle fixe d'un solénoïde et dont le mouvement total se compose d'un mouvement de rotation autour de ce pôle et d'un mouvement de translation, éprouve la même induction que s'il n'avait été soumis qu'à ce dernier mouvement, et pour connaître celui-ci, il suffira de concevoir le pôle lié avec le conducteur, dès l'origine, et entraîné avec lui dans son mouvement.

2°. Si un conducteur fermé tourne autour d'un axe qui contient le pôle d'un solénoïde, il n'éprouve aucun phénomène d'induction de la part de ce pôle.

3°. Si un conducteur fermé tourne autour de la ligne de jonction des deux pôles d'un solénoïde, il ne s'y développe aucun courant d'induction.

4°. Le courant induit qui se développe dans un arc de conducteur non fermé par la rotation de cet arc autour du pôle d'un solénoïde ne dépend pas de la forme du conducteur, mais seulement du mouvement de ses deux extrémités.

Nommons maintenant $d\psi$ l'angle de rotation infiniment petit du conducteur, angle qui a pour valeur

$$d\psi = \sqrt{d\mathrm{L}^2 + d\mathrm{M}^2 + d\mathrm{N}^2}.$$

Soient l, m, n les angles que fait l'axe de rotation avec les trois axes coordonnés des x, y, z; on aura

$$d\mathrm{L} = \cos l\, d\psi, \quad d\mathrm{M} = \cos m\, d\psi, \quad d\mathrm{N} = \cos n\, d\psi.$$

La formule (25) se change, par la substitution de ces valeurs, en

$$(26) \qquad \mathrm{D}_d = -\, u'x' \left\{ \cos l \left[\frac{x-\xi_{,}}{r}\right] + \cos m \left[\frac{y-\eta_{,}}{r}\right] + \cos n \left[\frac{z-\zeta_{,}}{r}\right] \right\} d\psi.$$

La quantité entre parenthèses est égale à la différence des cosinus des deux angles que fait l'axe avec chacun des rayons vecteurs menés du pôle du solénoïde à chacune des deux extrémités du conducteur.

On arriverait aux mêmes résultats en supposant le conducteur immobile, et le solénoïde tournant autour de son pôle supposé fixe.

Soient $d\mathrm{L}_{,}$, $d\mathrm{M}_{,}$, $d\mathrm{N}_{,}$ les composantes de ce mouvement angulaire autour de chacun des axes des coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$; on aura entre $d\mathrm{L}$, $d\mathrm{M}$, $d\mathrm{N}$, $d\mathrm{L}_{,}$, $d\mathrm{M}_{,}$, $d\mathrm{N}_{,}$, les trois relations

$$d\mathrm{L} = a\,d\mathrm{L}_{,} + b\,d\mathrm{M}_{,} + c\,d\mathrm{N}_{,},$$
$$d\mathrm{M} = a_{,}\,d\mathrm{L}_{,} + b_{,}\,d\mathrm{M}_{,} + c_{,}\,d\mathrm{N}_{,},$$
$$d\mathrm{N} = a_{,,}\,d\mathrm{L}_{,} + b_{,,}\,d\mathrm{M}_{,} + c_{,,}\,d\mathrm{N}_{,}.$$

Transportons ces valeurs dans l'équation (24); mettons au lieu de x, y, z les valeurs empruntées aux équations (4); enfin remplaçons $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ par leurs valeurs en ξ,

η, ζ tirées des équations (17); nous aurons

$$(27)\qquad D_d = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\left\{\left[\frac{x_, - \xi}{r}\right] dL_, + \left[\frac{y_, - \eta}{r}\right] dM_, + \left[\frac{z_, - \zeta}{r}\right] dN_,\right\},$$

$$(28)\qquad J_d = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\int\left\{\left[\frac{x_, - \xi}{r}\right] dL_, + \left[\frac{y_, - \eta}{r}\right] dM_, + \left[\frac{z_, - \zeta}{r}\right] dN_,\right\},$$

et, en écrivant $dL_, = \cos l'\, d\psi$, $dM_, = \cos m'\, d\psi$, $dN_, = \cos n'\, d\psi$,

$$(29)\qquad D_d = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\left\{\cos l'\left[\frac{x_, - \xi}{r}\right] + \cos m'\left[\frac{y_, - \eta}{r}\right] + \cos n'\left[\frac{z_, - \zeta}{r}\right]\right\} d\psi.$$

La quantité entre parenthèses est la différence des cosinus des deux angles que forme l'axe de rotation du solénoïde avec les rayons vecteurs qui joignent son pôle aux deux extrémités du conducteur.

§ VI.

La substitution du mouvement du solénoïde à celui du conducteur induit a facilité les calculs précédents, parce que nous n'avons eu à considérer que le mouvement d'un point, au lieu du mouvement des éléments du conducteur. Cette substitution est permise, puisque le solénoïde représente le circuit inducteur, et qu'entre le circuit inducteur et le circuit induit, l'induction ne dépend que du mouvement relatif.

Si donc nous avions eu à traiter le cas où un solénoïde se meut vers un conducteur, nous aurions trouvé de même :

1°. Que l'induction développée ne dépend que du mouvement des deux pôles du solénoïde;

2°. Que le courant induit est alors exprimé par les formules (21), (22), (27), (28) et (29) du paragraphe précédent.

Il faut donc distinguer, dans le mouvement d'un pôle de solénoïde et quoique ce pôle soit un simple point mathématique, un mouvement de translation et aussi un mouvement de rotation. Nous représenterons, comme ci-dessus, par D'_p, J'_p les courants provenant de la translation, D'_d, J'_d, ceux provenant de la rotation, et l'on aura

$$D' = D'_p + D'_d,$$
$$J' = J'_p + J'_d.$$

Soient maintenant ξ, η, ζ les coordonnées du pôle variables avec le temps. Concevons que ce pôle se meuve sur un arc de courbe ϖ; les projections de $d\varpi$ sur les trois axes seront $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$. Soient X_p, Y_p, Z_p les composantes de l'action électrodynamique exercée par le conducteur sur le pôle, le conducteur étant toujours supposé parcouru par l'unité de courant; on aura, d'après les formules (21) et (22) du paragraphe précédent,

$$(1)\qquad D'_p = -\varepsilon\varepsilon'(X_p d\xi + Y_p d\eta + Z_p d\zeta),$$

$$(2)\qquad J'_p = -\varepsilon\varepsilon'\int(X_p d\xi + Y_p d\eta + Z_p d\zeta).$$

Ces équations représentent la partie du courant induit correspondant au mouvement de translation du pôle.

S'il a autour de lui-même un mouvement de rotation dont la valeur soit l'angle $d\psi$, dans le temps dt, autour d'un axe faisant, avec ceux des ξ, η, ζ, les angles l', m', n', on aura

$$(3)\qquad D'_d = -\varepsilon\varepsilon' x'\left\{\cos l'\left[\frac{x_{,}-\xi}{r}\right] + \cos m'\left[\frac{y_{,}-\eta}{r}\right] + \cos n'\left[\frac{z_{,}-\zeta}{r}\right]\right\},$$

$$(4)\qquad J'_p = -\varepsilon\varepsilon' x'\int\left\{\cos l'\left[\frac{x_{,}-\xi}{r}\right] + \cos m'\left[\frac{y_{,}-\eta}{r}\right] + \cos n'\left[\frac{z_{,}-\zeta}{r}\right]\right..$$

Dans ces formules, les quantités entre parenthèses sont la différence des valeurs que prennent ces quantités en passant de l'une des extrémités du conducteur à l'autre.

On conclut de là :

Le courant d'induction que produit le pôle d'un solénoïde en mouvement vers un circuit fermé ne dépend que de la translation de ce pôle.

Si le pôle n'a pas de mouvement de translation, il n'y a pas de courant induit dans un circuit fermé.

Il y a induction, quoique le pôle soit sans mouvement de translation, par la simple rotation de ce pôle autour de lui-même, si le conducteur n'est pas fermé.

Ce dernier théorème explique les phénomènes d'induction produits par la rotation d'un aimant autour de son axe, phénomènes auxquels Weber a donné le nom d'*induction unipolaire*.

§ VII.

J'arrive maintenant à l'induction développée par des aimants. D'après les idées d'Ampère, un aimant est un assemblage d'un nombre infiniment grand de solénoïdes infiniment petits. A ce point de vue, un solénoïde infiniment petit est synonyme d'un *atome magnétique*.

Je cherche d'abord l'expression du courant d'induction que développe dans un conducteur un solénoïde d'infiniment petites dimensions.

Le solénoïde étant censé fixe, soient toujours s l'arc du conducteur, Ds un élément de cet arc, x, y, z les coordonnées du milieu de cet élément; soient w l'arc de la courbe qu'il décrit, dw l'élément de cette courbe, et dx, dy, dz les projections de cet élément sur les axes. Soient $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ les coordonnées du pôle sud du solénoïde [*]; soient $\xi_{,}+\alpha$, $\eta_{,}+\beta$, $\zeta_{,}+\gamma$ celles du pôle nord : α, β, γ sont de très-petites quantités, dont les puissances supérieures peuvent se négliger devant $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$. L'intensité de l'un des pôles sera x'; celle de l'autre $-x'$. Si le solénoïde est remplacé par un atome magné-

[*] J'appelle ainsi celui qui se dirigerait vers le sud, si le solénoïde était libre.

tique, les coordonnées des pôles de l'atome magnétique seront les mêmes que celles des pôles du solénoïde : $\varkappa'$ représentera la quantité de fluide boréal accumulée au pôle sud ; $-\varkappa'$ celle de fluide austral accumulée à l'autre pôle ; $\varkappa'$ sera donc la quantité absolue de fluide magnétique libre.

D'après la formule (1) du § V, le courant induit par le pôle sud $(\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,})$ sera représenté par la formule

$$(1) \qquad \mathrm{J} = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} \mathrm{S.D}s\,(\mathrm{X}_\sigma\, dx + \mathrm{Y}_\sigma\, dy + \mathrm{Z}_\sigma\, dz),$$

$\mathrm{X}_\sigma \mathrm{D}s$, $\mathrm{Y}_\sigma \mathrm{D}s$, $\mathrm{Z}_\sigma \mathrm{D}s$ étant les trois composantes parallèles aux x, y, z de l'action électrodynamique exercée par le pôle $(\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,})$ sur l'élément $\mathrm{D}s$ parcouru par un courant égal à 1. Les valeurs de ces composantes sont données par les équations (2) du § V. Remplaçons-y $\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,}$ par $\xi_{,} + \alpha$, $\eta_{,} + \beta$, $\zeta_{,} + \gamma$, et changeons le signe ; nous aurons le courant développé par le second pôle. La somme des actions de ces deux courants, en tenant compte des signes, sera désignée par $\mathrm{J}^{(a)}$, et représentera l'intensité du courant d'induction engendré par l'atome magnétique.

En développant par le théorème de Taylor, et rejetant toutes les puissances supérieures de α, β, γ, on trouve

$$(2) \qquad \mathrm{J}^{(a)} = +\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varkappa'} \int_{w_0}^{w_1} \mathrm{S.D}s \left\{ \begin{aligned} &\left(a\frac{d\mathrm{X}_\sigma}{d\xi_{,}} + b\frac{d\mathrm{X}_\sigma}{d\eta_{,}} + c\frac{d\mathrm{X}_\sigma}{d\zeta_{,}}\right) dx \\ + &\left(a\frac{d\mathrm{Y}_\sigma}{d\xi_{,}} + b\frac{d\mathrm{Y}_\sigma}{d\eta_{,}} + c\frac{d\mathrm{Y}_\sigma}{d\zeta_{,}}\right) dy \\ + &\left(a\frac{d\mathrm{Z}_\sigma}{d\xi_{,}} + b\frac{d\mathrm{Z}_\sigma}{d\eta_{,}} + c\frac{d\mathrm{Z}_\sigma}{d\zeta_{,}}\right) dz \end{aligned} \right\}.$$

Dans cette formule, on a $a = \varkappa'\alpha$, $b = \varkappa'\beta$, $c = \varkappa'\gamma$: ce sont les *moments magnétiques de l'atome*, suivant la terminologie de M. Gauss : $\frac{d\mathrm{X}_\sigma}{d\xi_{,}}, \frac{d\mathrm{X}_\sigma}{d\eta_{,}}, \ldots$ représentent des coefficients différentiels. Le facteur $\frac{1}{\varkappa'}$ doit disparaître de la formule (2) développée, attendu que le facteur $\varkappa'$ est implicitement contenu en X_σ, Y_σ, Z_σ.

Je considère maintenant, tout autour du pôle $\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,}$, un petit espace Δv, assez grand pour enfermer un grand nombre d'atomes magnétiques, et je nomme $\mathrm{J}^{(e)}$ la somme des courants d'induction développés par tous les éléments contenus dans cet espace ; je désigne par a', b', c' la moyenne arithmétique des valeurs de a, b, c appartenant aux divers éléments contenus dans l'espace Δv ; enfin je représente par $n\Delta v$ le nombre de ces solénoïdes.

On pourra, dans la formule (2), changer J_a en J_e, pourvu que l'on substitue aux lettres a, b, c les lettres a', b', c', et que l'on multiplie le second membre par $n\Delta v$. Ceci fait, remplaçons na', nb', nc', par α', β', γ' ; le courant d'induction produit

par l'espace Δv sera

$$(3)\qquad \mathrm{J}^{(e)} = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varkappa'}\int_{w_0}^{w_1} \mathrm{S}.\left\{\begin{aligned}&\left(\alpha'\frac{d\mathrm{X}_\sigma}{d\xi_,}+\beta'\frac{d\mathrm{Y}_\sigma}{d\eta_,}+\gamma'\frac{d\mathrm{Z}_\sigma}{d\zeta_,}\right)dx\\ +&\left(\alpha'\frac{d\mathrm{Y}_\sigma}{d\xi_,}+\beta'\frac{d\mathrm{Y}_\sigma}{d\eta_,}+\gamma'\frac{d\mathrm{Z}_\sigma}{d\zeta_,}\right)dy\\ +&\left(\alpha'\frac{d\mathrm{Z}_\sigma}{d\xi_,}+\beta'\frac{d\mathrm{Z}_\sigma}{d\eta_,}+\gamma'\frac{d\mathrm{Z}_\sigma}{d\zeta_,}\right)dz\end{aligned}\right\}\mathrm{D}s\,\Delta v.$$

Les quantités α', β', γ' sont les trois moments magnétiques que posséderait l'unité de volume d'un espace magnétique à distribution uniforme, où les atomes, aussi abondants que dans Δv, auraient chacun pour moment magnétique la valeur moyenne des moments des atomes de l'espace Δv.

En faisant la somme de cette expression par rapport à Δv, et l'étendant à tout le volume de l'aimant sur lequel on opère, on obtiendra le courant total d'induction que l'aimant doit développer dans le conducteur. Les moments magnétiques α', β', γ' sont fonctions des coordonnées $\xi_,$, $\eta_,$, $\zeta_,$ de l'élément Δv, et à cause de la petitesse de Δv, la somme de tous les termes correspondant aux différents volumes élémentaires Δv peut être considérée comme une intégrale triple; nous la désignerons par Σ. Je vais faire voir qu'on peut toujours remplacer cette triple intégrale par une intégrale double, prise relativement aux éléments à deux dimensions de la surface de l'aimant.

Je tire des équations (2) du § V les valeurs de X_σ, Y_σ, Z_σ et je les mets sous la forme suivante :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{X}_\sigma\mathrm{D}s &= \varkappa'\left\{\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta_,}\mathrm{D}y - \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta_,}\mathrm{D}z\right\},\\ \mathrm{Y}_\sigma\mathrm{D}s &= \varkappa'\left\{\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi_,}\mathrm{D}z - \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta_,}\mathrm{D}x\right\},\\ \mathrm{Z}_\sigma\mathrm{D}s &= \varkappa'\left\{\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta_,}\mathrm{D}x - \frac{d\frac{1}{r}}{d\xi_,}\mathrm{D}y\right\},\end{aligned}\right.$$

formules où r est donné par l'équation

$$r^2 = (x-\xi_,)^2 + (y-\eta_,)^2 + (z-\zeta_,)^2.$$

Je substitue ces valeurs dans l'équation (3), et j'écris, pour abréger,

$$\mathrm{P} = \alpha'\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi_,} + \beta'\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta_,} + \gamma'\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta_,}:$$

l'équation (3) devient

$$J^{(e)} = \varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S. \left\{ \begin{array}{l} \left(Dy \dfrac{dP}{d\zeta_{,}} - Dz \dfrac{dP}{d\eta_{,}} \right) dx \\ + \left(Dz \dfrac{dP}{d\xi_{,}} - Dx \dfrac{dP}{d\zeta_{,}} \right) dy \\ + \left(Dx \dfrac{dP}{d\eta_{,}} - Dy \dfrac{dP}{d\xi_{,}} \right) dz \end{array} \right\} \Delta v,$$

ou

(5) $$J^{(e)} = \varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S. \left\{ \begin{array}{l} (dy\, Dz - dz\, Dy) \dfrac{dP}{d\xi_{,}} \\ + (dz\, Dx - dx\, Dz) \dfrac{dP}{d\eta_{,}} \\ + (dx\, Dy - dy\, Dx) \dfrac{dP}{d\zeta_{,}} \end{array} \right\} \Delta v.$$

Ceci posé, écrivons

(6) $$\Delta v = D\xi_{,} D\eta_{,} D\zeta_{,},$$

et

$$Q = \Sigma . P\, D\xi_{,} D\eta_{,} D\zeta_{,}.$$

Intégrons dans toute l'étendue de l'aimant, et remplaçons les coefficients différentiels $\dfrac{dP}{d\xi_{,}}, \dfrac{dP}{d\eta_{,}}, \dfrac{dP}{d\zeta_{,}}$ par leurs équivalents $-\dfrac{dP}{dx}, -\dfrac{dP}{dy}, -\dfrac{dP}{dz}$; alors en tenant compte de l'équation (6), nous avons pour l'action totale de l'aimant,

(7) $$J^{(m)} = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S. \left\{ \begin{array}{l} (dy\, Dz - dz\, Dy) \dfrac{dQ}{dx} \\ + (dz\, Dx - dx\, Dz) \dfrac{dQ}{dy} \\ + (dx\, Dy - dy\, Dx) \dfrac{dQ}{dz} \end{array} \right\}.$$

En nommant $X_m Ds$, $Y_m Ds$, $Z_m Ds$ les trois composantes de l'action électrodynamique que l'aimant exerce sur l'élément Ds parcouru par un courant égal à 1, on a le système d'équations

(8) $$\left\{ \begin{array}{l} X_m Ds = \dfrac{dQ}{dz} Dy - \dfrac{dQ}{dy} Dz, \\ Y_m Ds = \dfrac{dQ}{dx} Dz - \dfrac{dQ}{dz} Dx, \\ Z_m Ds = \dfrac{dQ}{dy} Dx - \dfrac{dQ}{dx} Dy; \end{array} \right.$$

donc

(9) $$J_m = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S . Ds\, (X_m dx + Y_m dy + Z_m dz).$$

Je nommerai Q le *potentiel* de l'aimant par rapport à un pôle magnétique situé au point (x, y, z). On sait que les coefficients différentiels de Q, $\frac{dQ}{dx}, \frac{dQ}{dy}, \frac{dQ}{dz}$, sont les composantes de l'action de l'aimant sur ce pôle. M. Gauss a montré que, si ce pôle est extérieur à l'aimant, ce potentiel peut être remplacé par le potentiel de la surface de l'aimant, cette surface étant supposée magnétique et offrant une distribution convenable des fluides magnétiques. Si donc on nomme $\varkappa$ l'épaisseur de la couche de fluide magnétique boréal en un élément $D\omega$ de cette surface idéale, $\varkappa$ devenant négatif là où le fluide est austral, on a

$$(10) \qquad Q = \Sigma . \frac{\varkappa D\omega}{r}.$$

$\varkappa$ est une certaine fonction des coordonnées de l'élément $D\omega$, et Σ représente une intégrale étendue à toute la surface de l'aimant.

Poisson a démontré que, si la distribution des fluides magnétiques dans l'aimant a été déterminée, à l'origine, par des forces électrodynamiques susceptibles d'être représentées par un potentiel, les moments magnétiques α', β', γ' du point $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ situé dans l'intérieur de l'aimant sont les trois coefficients différentiels d'une certaine fonction φ de ces coordonnées; de sorte que l'on a

$$\alpha' = \frac{d\varphi}{d\xi_{,}}, \quad \beta' = \frac{d\varphi}{d\eta_{,}}, \quad \gamma' = \frac{d\varphi}{d\zeta_{,}},$$

et la fonction φ satisfait alors à l'équation

$$(11) \qquad \frac{d^2\varphi}{d\xi_{,}^2} + \frac{d^2\varphi}{d\eta_{,}^2} + \frac{d^2\varphi}{d\zeta_{,}^2} = 0.$$

Alors, si l'on fait varier φ, en se transportant du point de la surface correspondant à l'élément $D\omega$, à un point intérieur situé sur une normale à la surface, à une distance dN de cette surface, en intégrant par parties l'équation (6), en tenant compte de l'équation (11), et faisant intervenir les angles que fait la normale dN avec les axes [*], on trouve

$$(12) \qquad Q = \Sigma \cdot \frac{d\varphi}{dN} \frac{d\omega}{r};$$

de sorte que, dans ce cas, on a

$$\varkappa = \frac{d\varphi}{dN}.$$

Si l'on tire de l'équation (10) la valeur de Q pour la substituer dans les équations (8) et (9), on obtient

$$(13) \qquad J^{(m)} = - \varepsilon\varepsilon' \Sigma . \varkappa D\omega \int_{w_0}^{w_1} S . \frac{1}{r^3} \left\{ \begin{array}{l} \quad [(y - \eta_{,}) Dz - (z - \zeta_{,}) Dy]\, dx \\ + [(z - \zeta_{,}) Dx - (x - \xi_{,}) Dz]\, dy \\ + [(x - \xi_{,}) Dy - (y - \eta_{,}) Dx]\, dz \end{array} \right\}.$$

[*] Il suffit de traiter cette équation de la même manière que sera traitée ci-dessous l'équation (10) du § VIII. A. B.

C'est là la forme la plus simple sous laquelle puisse être mise la valeur du courant d'induction que développe un aimant fixe dans un conducteur en mouvement.

On obtient la même expression si, dans l'équation (1) du § V, on substitue les valeurs de $X_\sigma Ds$, $Y_\sigma Ds$, $Z_\sigma Ds$, tirées des équations (2) du même paragraphe, si ensuite on y change x' en $-xD\omega$, et si l'on étend l'intégrale à toute la surface de l'aimant.

En supprimant le signe Σ dans l'équation (13), elle donne la valeur du courant induit dû au seul élément $D\omega$, et l'on verrait, comme ci-dessus, en substituant le mouvement de l'aimant à celui du conducteur, que ce courant se décompose en deux, l'un dû à la translation de $D\omega$ et que je nommerai $J_p^{(m)}$, l'autre à la rotation de $D\omega$ et que je nommerai $J_d^{(m)}$.

Alors, en donnant à $x_,, y_,, z_,, \xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu, d\psi$ la même signification que possèdent ces lettres dans le § V, on aura

$$(14)\qquad J^{(m)} = J_p^{(m)} + J_d^{(m)},$$

$$(15)\qquad J_p^{(m)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.xD\omega\int_{w_0}^{w_1} S.\frac{1}{r^3}\left\{\begin{array}{l}[(z_, - \zeta)Dy - (y_, - \eta)Dz]\,d\xi \\ +[(x_, - \xi)Dz - (z_, - \zeta)Dx]\,d\eta \\ +[(y_, - \eta)Dx - (x_, - \xi)Dy]\,d\zeta\end{array}\right\},$$

$$(16)\qquad J_d^{(m)} = +\varepsilon\varepsilon'\Sigma.xD\omega\int_{w_0}^{w_1} d\psi\left\{\left[\frac{x_, - \xi}{r}\right]\cos\lambda + \left[\frac{y_, - \eta}{r}\right]\cos\mu + \left[\frac{z_, - \zeta}{r}\right]\cos\nu\right\},$$

$$(17)\qquad r^2 = (x_, - \xi)^2 + (y_, - \eta)^2 + (z_, - \zeta)^2.$$

Si l'on veut passer du cas d'un aimant en repos agissant sur un conducteur mobile, au cas de l'aimant en mouvement agissant sur un conducteur en repos, il suffira de donner au système un mouvement commun qui ramène l'aimant au repos. On tombe alors de l'équation (13) sur le système des équations (14), (15) et (16).

Les théorèmes suivants sont des conséquences de ce qui précède :

I. Lorsqu'un circuit fermé ou non fermé, mais de forme invariable, obéit à un mouvement de translation en présence d'un aimant, on peut remplacer cette translation par le mouvement inverse de l'aimant, et la force électromotrice du courant induit momentané est toujours exprimée par la vitesse de ce mouvement multipliée par la composante efficace de l'action électrodynamique que l'aimant exerce sur le conducteur supposé en repos, et parcouru par le courant d'intensité ε.

II. Si le circuit est fermé, cette force est égale à la somme des produits de la vitesse relative des éléments de la surface magnétique idéale de l'aimant par les composantes efficaces des actions qu'ils exercent sur le conducteur parcouru par le courant ε.

III. Si le conducteur n'est pas fermé et s'il obéit à un double mouvement de translation et de rotation, la rotation engendrera une deuxième force électromotrice qui dépendra de la situation des extrémités de l'arc du conducteur.

IV. Si un aimant se meut parallèlement à lui-même vis-à-vis d'un conducteur fixe, la force électromotrice du courant induit sera égale, au signe près, à la vitesse du

mouvement multipliée par la composante efficace de l'action électrodynamique de l'aimant sur le conducteur parcouru par le courant ε.

V. Si un aimant obéit à un double mouvement de translation et de rotation, son action électromotrice sur un conducteur fermé sera égale à la somme des produits de la vitesse des éléments de la surface magnétique par les composantes efficaces des actions exercées par chaque élément sur le conducteur parcouru par le courant ε.

VI. Si le circuit n'est pas fermé, il se développera une seconde force électromotrice dépendant de la position des deux extrémités de l'arc du conducteur.

§ VIII.

Je vais m'occuper maintenant des courants d'induction produits par l'aimantation et la désaimantation, en considérant ces phénomènes comme dus à la séparation ou à la réunion des deux fluides de nom contraire. Dans le paragraphe suivant, j'envisagerai ce même sujet sous un autre point de vue, au moyen d'un principe nouveau qui dérive des résultats précédents généralisés, et permet de déterminer facilement les courants d'induction engendrés par un changement d'intensité du courant inducteur.

Je suppose donc que la désaimantation consiste en ce que les deux fluides distribués d'une certaine manière à la surface d'un atome magnétique viennent se neutraliser en se réunissant en un ou plusieurs points centraux. Soient toujours ξ, η, ζ les coordonnées du milieu de l'atome *magnétique;* $\xi+\xi_0$, $\eta+\eta_0$, $\zeta+\zeta_0$, celles de l'élément $D\omega$ de la surface de cet atome; $\xi+a$, $\eta+b$, $\zeta+c$, celles du point intérieur où la neutralisation s'opère. Soit $\varkappa D\omega$ la quantité de fluide répandue sur l'élément $D\omega$, $\varkappa$ étant une fonction de ξ_0, η_0, ζ_0. L'expression $\Sigma.\varkappa D\omega$, intégrée relativement à toute la surface, doit être égale à zéro. Soit $\varkappa' D\omega$ la quantité qui se meut du point (ξ_0, η_0, ζ_0) vers le point intérieur (a, b, c); $\varkappa'$ est une fonction de ξ_0, η_0, ζ_0, et satisfait à l'équation

$$\Sigma.\varkappa' D\omega = 0.$$

Soient $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, $\delta\zeta_0$ les trois projections de l'élément de la route que parcourt le fluide $\varkappa' D\omega$ dans ce mouvement. Nous sommes ici dans les conditions de translation d'un pôle magnétique, en présence d'un conducteur immobile; ainsi nous aurons à appliquer la formule (15) du paragraphe précédent. Toutefois, à cause de la petitesse de l'élément magnétique, les composantes de l'action électrodynamique peuvent être regardées comme constantes pendant tout le mouvement des fluides; et en représentant ces composantes par $A\varkappa' D\omega$, $B\varkappa' D\omega$, $C\varkappa' D\omega$, on aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= S.\frac{1}{r^3}[(z_, - \zeta)Dy - (y_, - \eta)Dz],\\ B &= S.\frac{1}{r^3}[(x_, - \xi)Dz - (z_, - \zeta)Dx],\\ C &= S.\frac{1}{r^3}[(y_, - \eta)Dx - (x_, - \xi)Dy],\end{aligned}\right.$$

équations qui se déduisent facilement des équations (2) du § V.

Alors, en nommant J le courant d'induction, on aura

$$(1\ bis)\qquad J = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\int \varkappa' D\omega\,(A\delta\xi_0 + B\delta\eta_0 + C\delta\zeta_0).$$

Si l'on effectue l'intégration relativement à la route parcourue, on fera disparaître le signe $\int$, et l'on aura

$$J = \varepsilon\varepsilon'\Sigma.\varkappa' D\omega\,[A(\xi_0 - a) + B(\eta_0 - b) + C(\zeta_0 - c)].$$

Intégrant par décomposition relativement à Σ, remarquant que a, b, c sont constants, et que $\Sigma.\varkappa' D\omega = 0$, on trouve

$$(2)\qquad J = \varepsilon\varepsilon'[A\Sigma.\varkappa'\xi_0 D\omega + B\Sigma.\varkappa'\eta_0 D\omega + C\Sigma.\varkappa'\zeta_0 D\omega].$$

Ainsi le courant J est indépendant de la position du point de neutralisation (a, b, c): si donc l'on désigne par $\varkappa'' D\omega$, $\varkappa''' D\omega$ les quantités de fluide qui partent de l'élément $D\omega$ pour venir se neutraliser en un second, un troisième point, etc., on aura pour le courant total E provenant de l'élément magnétique considéré, et à cause de $\varkappa' + \varkappa'' + \varkappa'''\ldots = \varkappa$,

$$E = \varepsilon\varepsilon'(A\Sigma.\varkappa\xi_0 D\omega + B\Sigma.\varkappa\eta_0 D\omega + C\Sigma.\varkappa\zeta_0 D\omega).$$

Les quantités $\Sigma.\varkappa\xi_0 D\omega$, $\Sigma.\varkappa\eta_0 D\omega$, $\Sigma.\varkappa\zeta_0 D\omega$ sont précisément les moments magnétiques de l'atome, quantités représentées par a, b, c dans le § VII. On peut donc écrire, en les désignant ici par α, β, γ,

$$(3)\qquad E = \varepsilon\varepsilon'(A\alpha + B\beta + C\gamma).$$

On obtiendrait de même le courant dû à l'aimantation de l'atome magnétique. Il suffit de changer le signe du second membre de la dernière équation : en nommant M le courant induit, il viendra

$$(4)\qquad M = -\varepsilon\varepsilon'(A\alpha + B\beta + C\gamma).$$

Renfermons maintenant le point ξ, η, ζ dans un petit espace Dv, et concevons que α, β, γ soient les moments magnétiques moyens de cet espace; soit nDv le nombre des atomes contenu en Dv, et posons

$$n\alpha = \alpha', \quad n\beta = \beta', \quad n\gamma = \gamma'.$$

Le courant induit M', dû à l'aimantation de l'espace magnétique Dv, sera

$$(5)\qquad M' = -\varepsilon\varepsilon'(A\alpha' + B\beta' + C\gamma')\,Dv.$$

Les quantités α', β', γ' sont, comme dans le § VII, les moments magnétiques moyens de l'unité de volume au point considéré.

Si donc l'on intègre relativement à tout le volume de l'aimant, on aura, en nommant $J^{(\mu)}$ le courant total d'induction,

$$(6)\qquad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.(A\alpha' + B\beta' + C\gamma')\,Dv.$$

C'est une triple intégrale à étendre à tout le volume de l'aimant.

D'après une loi d'Ampère, l'action d'un circuit fermé sur un pôle magnétique se laisse toujours exprimer par un potentiel [*]. En nommant V cette fonction, on a donc

$$A = \frac{dV}{d\xi}, \quad B = \frac{dV}{d\eta}, \quad C = \frac{dV}{d\zeta}.$$

D'autre part, la distribution du magnétisme dans l'intérieur de l'aimant doit être considérée comme ayant été primitivement le résultat de l'action de forces électrodynamiques dont la résultante pouvait aussi s'exprimer par un certain potentiel; car l'aimantation a été produite soit par d'autres aimants, soit par des courants galvaniques, et les forces provenant de ces sources électrodynamiques s'expriment toujours par des potentiels.

Ainsi α', β', γ' doivent pouvoir se mettre sous la forme

$$(8) \qquad \alpha' = \frac{d\varphi}{d\xi}, \quad \beta' = \frac{d\varphi}{d\eta}, \quad \gamma' = \frac{d\varphi}{d\zeta},$$

la fonction φ étant convenablement choisie, et satisfaisant d'ailleurs à l'équation

$$(9) \qquad \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} = 0.$$

Posons, en outre,

$$Dv = D\xi\, D\eta\, D\zeta.$$

L'équation (6), transformée par le moyen de ces dernières équations, deviendra

$$(10) \qquad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon' \Sigma.\left[\frac{dV}{d\xi}\frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{dV}{d\eta}\frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{dV}{d\zeta}\frac{d\varphi}{d\zeta}\right] D\xi\, D\eta\, D\zeta.$$

Intégrons par parties le premier des trois termes du second membre; nous aurons

$$\Sigma.\frac{dV}{d\xi}\frac{d\varphi}{d\xi} D\xi\, D\eta\, D\zeta = \Sigma.\left[V\frac{d\varphi}{d\xi}\right] D\eta\, D\zeta - \Sigma.V\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} D\xi\, D\eta\, D\zeta.$$

Les parenthèses indiquent la différence des valeurs que prend la quantité $V\frac{d\varphi}{d\xi}$ aux deux points où la droite $y = \eta$, $z = \zeta$, parallèle à l'axe des x, coupe la surface de l'aimant. Si l'on opère de même sur les autres membres, en tenant compte de l'équation (9), on aura

$$J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon' \Sigma.\left\{\left[V\frac{d\varphi}{d\xi}\right] D\eta\, D\zeta + \left[V\frac{d\varphi}{d\eta}\right] D\xi\, D\zeta + \left[V\frac{d\varphi}{d\zeta}\right] D\xi\, D\eta\right\}.$$

L'intégration indiquée par le signe Σ ne se rapporte plus maintenant qu'aux points de la

[*] Lorsque j'annonce qu'une action mécanique exercée sur un point se laisse exprimer par un potentiel, cela veut dire qu'il existe une fonction des coordonnées ξ, η, ζ de ce point, telle que ses coefficients différentiels par rapport à ξ, η, ζ sont les trois composantes de cette action parallèlement aux axes des ξ, η et ζ.

surface de l'aimant. Si l'on nomme $D\omega$ l'élément de cette surface qui correspond au point (ξ, η, ζ); (N, ξ), (N, η), (N, ζ), les angles que la normale à la surface au point (ξ, η, ζ) fait avec les trois axes coordonnés, on aura

$$D\eta D\zeta = D\omega \cos(N, \xi), \quad D\xi D\zeta = D\omega \cos(N, \eta), \quad D\xi D\eta = D\omega \cos(N, \zeta),$$

et, par conséquent,

$$(11) \qquad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon' \Sigma \cdot \left[V \frac{d\varphi}{d\xi} \cos(N, \xi) + V \frac{d\varphi}{d\eta} \cos(N, \eta) + V \frac{d\varphi}{d\zeta} \cos(N, \zeta) \right] D\omega.$$

Soit maintenant $\frac{d\varphi}{dN} dN$ la variation de la fonction φ, en passant d'un point de la surface à un point intérieur situé sur la normale à cette surface et à une distance dN du premier point ; les coordonnées de ce point seront

$$\xi + dN \cos(N, \xi), \quad \eta + dN \cos(N, \eta), \quad \zeta + dN \cos(N, \zeta);$$

ainsi

$$dN \cos(N, \xi), \quad dN \cos(N, \eta), \quad dN \cos(N, \zeta)$$

seront les trois variations de ξ, η, ζ, en passant du premier point au second, et l'on aura

$$\frac{d\varphi}{dN} dN = \frac{d\varphi}{d\xi} dN \cos(N, \xi) + \frac{d\varphi}{d\eta} dN \cos(N, \eta) + \frac{d\varphi}{d\zeta} dN \cos(N, \zeta).$$

Ainsi l'équation (11) peut être mise sous la forme

$$(12) \qquad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon' \Sigma . V \frac{d\varphi}{dN} D\omega.$$

La quantité $\frac{d\varphi}{dN}$ est le coefficient différentiel relatif à la variation de la fonction le long de la normale à la surface.

Si au lieu de décomposer par rapport à φ l'équation (10), nous l'eussions décomposée par rapport à V, nous aurions eu de même, à cause de

$$\frac{d^2V}{d\xi^2} + \frac{d^2V}{d\eta^2} + \frac{d^2V}{d\zeta^2} = 0,$$

$$(13) \qquad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon' \Sigma . \varphi \frac{dV}{dN} D\omega.$$

Les intégrations indiquées par les équations (12) et (13) doivent s'étendre à toute la surface de l'aimant ; les quantités φ, V, $\frac{d\varphi}{dN}$, $\frac{dV}{dN}$ sont des fonctions des coordonnées de l'élément $D\omega$.

En changeant le signe du second membre de ces équations, on aurait la valeur du courant induit dû à la désaimantation.

Jusqu'ici nous avons supposé que le corps passait de l'état neutre à un certain état magnétique, ou réciproquement. S'il y avait une simple altération de l'état magnétique, il faudrait considérer la fonction φ comme variable, par exemple comme étant égale à φ' au commencement du changement d'état, et égale à φ'' lorsque ce changement est effectué ; on aurait alors les deux équations suivantes :

$$J^{\mu} = \varepsilon\varepsilon' \Sigma . V \frac{d(\varphi' - \varphi'')}{dN} D\omega, \tag{14}$$

$$J^{\mu} = \varepsilon\varepsilon' \Sigma . \frac{dV}{dN} (\varphi' - \varphi'') D\omega. \tag{15}$$

La triple intégration sous-entendue par l'équation (6) se laisse toujours ramener à une double intégration relative à la surface. On peut en effet, comme M. Gauss l'a démontré, substituer à la distribution magnétique des fluides dans l'aimant une certaine distribution superficielle, produisant à l'extérieur les mêmes effets ; or les composantes de l'action électrodynamique de l'aimant sur un pôle magnétique extérieur à cet aimant sont représentées par les dérivées partielles de la quantité Q de l'équation (6) du paragraphe précédent ; elles le sont par les dérivées de la quantité $\Sigma . \frac{\varkappa D\omega}{r}$ dans le cas de la distribution superficielle, r étant la distance d'un élément $D\omega$ au pôle considéré. On a ainsi

$$\Sigma . \left\{ \alpha' \frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} + \beta' \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} + \gamma' \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} \right\} D\xi\, D\eta\, D\zeta = \Sigma . \frac{\varkappa}{r} D\omega.$$

En multipliant les deux membres par la masse indéterminée m, que l'on supposera concentrée au pôle extérieur que l'on considère, on aura

$$\Sigma . \left\{ \alpha' \frac{d\frac{m}{r}}{d\xi} + \beta' \frac{d\frac{m}{r}}{d\eta} + \gamma' \frac{d\frac{m}{r}}{d\zeta} \right\} D\xi\, D\eta\, D\zeta = \Sigma . \varkappa \frac{m}{r} D\omega.$$

Considérons une série d'autres pôles placés à des distances r', r'',... de l'élément $D\omega$ et possédant des masses de fluide m', m'',...; en formant pour ces pôles des équations analogues, les ajoutant ensemble, et posant

$$U = \frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} \cdots,$$

on aura

$$\Sigma . \left\{ \alpha' \frac{dU}{d\xi} + \beta' \frac{dU}{d\eta} + \gamma' \frac{dU}{d\zeta} \right\} D\xi\, D\eta\, D\zeta = \Sigma . \varkappa U D\omega.$$

Reportons-nous maintenant à l'équation (6) de ce paragraphe : les quantités A, B, C sont les dérivées partielles d'un certain potentiel V ; en outre, ce potentiel V peut toujours être considéré comme représentant l'action qu'exerceraient certaines masses de

fluides magnétiques, extérieures à l'aimant, sur cet aimant lui-même; on en conclura qu'on peut toujours déterminer la fonction U de manière à avoir $U = V$, et, par conséquent, l'équation (6) devient

$$J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\varkappa V D\omega. \tag{16}$$

Si l'on suppose que le magnétisme superficiel passe du mode de distribution indiqué par la fonction $\varkappa'$ au mode indiqué par la nouvelle fonction $\varkappa''$, le courant induit, résultat de ce changement, aura pour valeur

$$J^{(\mu)} = \varepsilon\varepsilon'\Sigma.(\varkappa' - \varkappa'') V D\omega. \tag{17}$$

§ IX.

Je vais maintenant démontrer que le courant induit par un aimant dans un conducteur dépend seulement du changement de valeur que le mouvement relatif des deux corps détermine dans le potentiel dont les dérivées représentent les trois composantes de l'action totale qu'exerce le conducteur parcouru par un courant égal à 1 sur l'aimant que l'on considère; de sorte que l'on peut énoncer le principe suivant :

« Le changement de ce potentiel est la cause de l'induction et lui sert de mesure,
» et de quelque manière que ce potentiel vienne à éprouver un changement constant
» et défini, l'induction produite est toujours la même. »

Je reprends l'équation (1 *bis*) du § VIII, et je remarque qu'elle représente le courant total qui se développe en un conducteur fermé par l'effet du transport $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ de la masse de fluide $\varkappa' D\omega$. Je mets cette équation sous la forme

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\int \varkappa (A\delta\xi + B\delta\eta + C\delta\zeta) D\omega;$$

A, B, C sont les composantes de l'action de l'unité de courant du conducteur sur l'unité de fluide en $D\omega$.

Le conducteur étant fermé, on peut employer les équations (7) du § VIII, et l'on a

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\int \varkappa \left\{ \frac{dV}{d\xi}\delta\xi + \frac{dV}{d\eta}\delta\eta + \frac{dV}{d\zeta}\delta\zeta \right\} D\omega.$$

Intégrons cette expression relativement au chemin parcouru, et soient V', V'' les deux valeurs que prend le potentiel V aux deux extrémités de ce chemin; on aura

$$J = \varepsilon\varepsilon'\Sigma.\varkappa(V' - V'') D\omega. \tag{1}$$

Si l'aimant vient d'une distance infinie, on a $V' = 0$, et

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\Sigma.\varkappa V'' D\omega. \tag{2}$$

Les mêmes équations (1) et (2) s'appliquent aussi au cas du mouvement du conducteur, l'aimant restant en repos.

Nous avons déjà vu que, si l'état magnétique de l'aimant est le résultat de forces extérieures expressibles par des potentiels, $\varkappa$ pouvait se mettre sous la forme

$$(3)\qquad \varkappa = \frac{d\varphi}{dN}.$$

La quantité εV est le potentiel du conducteur parcouru par le courant ε et agissant sur l'unité de fluide magnétique en $D\omega$. D'après cela, $\varepsilon\Sigma.\varkappa VD\omega$ est la somme des potentiels du conducteur étendue à toutes les masses magnétiques de l'aimant, et j'appellerai cette somme *le potentiel du conducteur agissant sur tout l'aimant*, ou, ce qui revient au même, *le potentiel de l'aimant relativement au conducteur.*

D'après ces définitions, on voit que « la force électromotrice, développée en un circuit fermé par le mouvement d'un aimant, est égale à la différence des valeurs initiale et finale du potentiel du conducteur parcouru par le courant ε relativement à l'aimant. »

Cette loi est tout à fait générale quelle que soit la grandeur ou la nature du mouvement de l'aimant : « Ainsi toute circonstance qui changera la valeur de ce potentiel développera un courant d'induction, » et c'est ce changement de valeur qui peut être considéré comme étant la cause de l'induction. Parmi ces circonstances, on peut mentionner le changement de l'état magnétique de l'aimant. Nous avons déjà trouvé que, dans ce cas, on avait

$$(4)\qquad J^{(\mu)} = \varepsilon\varepsilon'\Sigma.(\varkappa' - \varkappa'')\,VD\omega\,;$$

ainsi la force électromotrice développée est égale à $\varepsilon\Sigma.\varkappa' VD\omega - \varepsilon'\Sigma.\varkappa'' VD\omega$, c'est-à-dire à la différence des valeurs des deux potentiels.

§ X.

Nous allons appliquer les mêmes principes à la recherche du courant d'induction que développent en un conducteur les variations d'intensité d'un courant situé dans son voisinage. L'induction qui se développe dans un conducteur en mouvement sous l'influence d'un courant fixe a pour expression [*voyez* équation (6), § III],

$$(1)\qquad J = -\varepsilon\varepsilon' \int_{w_0}^{w_1} S.(X_\sigma \delta x + Y_\sigma \delta y + Z_\sigma \delta z)\,Ds.$$

Ds est un élément du conducteur induit: ses projections sur les axes sont Dx, Dy, Dz; δx, δy, δz sont les déplacements de cet élément dans le temps dt; X_σ, Y_σ, Z_σ sont les composantes de l'action électrodynamique exercée par tout le courant sur l'élément Ds parcouru par un courant égal à 1.

Par le circuit fermé du courant inducteur faites passer une surface courbe de forme arbitraire que vous limiterez extérieurement à la ligne courbe du circuit; décomposez cette surface ainsi limitée en éléments de surface contigus, et supposez qu'autour de chacun de ces éléments circule un courant de même sens et de même intensité que le

courant primitif. La réunion de tous ces petits circuits équivaudra évidemment au circuit initial. Soit $D\omega$ un de ces éléments: le courant j qui parcourt sa périphérie agira sur l'élément Ds, d'après une loi connue d'Ampère, comme le ferait un atome magnétique situé au centre de $D\omega$, ayant pour axe la normale à la surface et pour moment magnétique $\frac{1}{2} j\, D\omega$, j étant l'intensité du courant général.

Soient X, Y, Z les composantes de l'action électrodynamique que cet atome magnétique exerce sur l'unité de courant en Ds; en intégrant dans les limites de la surface idéale considérée, on aura

$$(2)\qquad X_\sigma Ds = \Sigma . X, \quad Y_\sigma Ds = \Sigma . Y, \quad Z_\sigma Ds = \Sigma . Z.$$

Les formules (2) du § V donnent l'action qu'un pôle de solénoïde exerce sur un élément Ds du conducteur induit parcouru par un courant égal à 1. Pour en déduire l'action d'un solénoïde infiniment court, il faut calculer la variation des seconds membres, relativement à l'axe du solénoïde : si donc $d\nu$ représente la distance des deux pôles, mesurée sur l'axe du solénoïde, normal à la surface en $D\omega$, on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
X &= \tfrac{1}{2}\frac{\alpha\lambda j}{r^3}\frac{d}{d\nu}[(z-\zeta_1)Dy-(y-\eta_1)Dz]\,d\nu \\
&= \tfrac{1}{2}\frac{j}{r^3}\frac{d}{d\nu}[(z-\zeta_1)Dy-(y-\eta_1)Dz]\,D\omega, \\
Y &= \tfrac{1}{2}\frac{\alpha\lambda j}{r^3}\frac{d}{d\nu}[(x-\xi_1)Dz-(z-\zeta_1)Dx]\,d\nu \\
&= \tfrac{1}{2}\frac{j}{r^3}\frac{d}{d\nu}[(x-\xi_1)Dz-(z-\zeta_1)Dx]\,D\omega, \\
Z &= \tfrac{1}{2}\frac{\alpha\lambda j}{r^3}\frac{d}{d\nu}[(y-\eta_1)Dx-(x-\xi_1)Dy]\,d\nu \\
&= \tfrac{1}{2}\frac{j}{r^3}\frac{d}{d\nu}[(y-\eta_1)Dx-(x-\xi_1)Dy]\,D\omega.
\end{aligned}\right.$$

On a, en effet, $\lambda = D\omega$ et $\alpha d\nu = 1$. Les quantités entre les crochets [ ] dépendent du signe d du numérateur voisin.

La comparaison des équations (1), (2), (3) de ce paragraphe avec les équations (1) et (2) du § V fait voir qu'elles n'en diffèrent que par la substitution de $\frac{1}{2} j D\omega$ à $\varkappa'$, par l'introduction du signe Σ relatif à la surface dont $D\omega$ est l'élément, enfin par ce que les fonctions entre deux crochets sont ici remplacées par leurs dérivées par rapport à ν. On pourra donc effectuer ici les mêmes transformations déjà effectuées dans le § V, et décomposer la valeur de J en deux parties J_p et J_d, l'une dépendant de la translation et l'autre de la rotation du conducteur. On aura ainsi

$$J = J_p + J_d,$$

$$(4)\qquad J_p = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j \Sigma . D\omega \frac{d}{d\nu}\int_{w_0}^{w_1}(X_p\delta\xi + Y_p\delta\eta + Z_p\delta\zeta),$$

$$
(5) \quad \begin{cases}
X_p = S \cdot \frac{1}{r^3}[(y_, - \eta)\, Dz_, - (z_, - \zeta)\, Dy_,], \\
Y_p = S \cdot \frac{1}{r^3}[(z_, - \zeta)\, Dx_, - (x_, - \xi)\, Dz_,], \\
Z_p = S \cdot \frac{1}{r^3}[(x_, - \xi)\, Dy_, - (y_, - \eta)\, Dx_,],
\end{cases}
$$

$$
r^2 = (x_, - \xi)^2 + (y_, - \eta)^2 + (z_, - \zeta)^2,
$$

$$
(6) \quad J_d = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j \Sigma . D\omega \frac{d}{d\nu} \int \left[\cos l' \frac{x_, - \xi}{r} + \cos m' \frac{y_, - \eta}{r} + \cos n' \frac{z_, - \zeta}{r} \right] d\psi .
$$

Ces expressions supposent que le conducteur induit est en repos : c'est le courant inducteur qui se meut, entraînant avec lui la surface auxiliaire dont $D\omega$ est un des éléments.

Si le conducteur induit est une courbe fermée, on a

$$
J_d = 0.
$$

Les quantités X_p, Y_p, Z_p, qui représentent les composantes de l'action du conducteur fixe sur l'unité de fluide magnétique condensée au point (ξ, η, ζ), peuvent toujours être considérées, d'après la loi déjà souvent citée d'Ampère, comme étant les dérivées par rapport à ξ, η, ζ d'une certaine fonction V_p de ces coordonnées. Ainsi V_p représentera le potentiel du conducteur relatif à l'unité de fluide en ξ, η, ζ. On aura donc

$$
X_p = \frac{dV_p}{d\zeta}, \quad Y_p = \frac{dV_p}{d\eta}, \quad Z_p = \frac{dV_p}{d\zeta}.
$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (4), intégrant depuis l'origine du mouvement jusqu'à la fin, et nommant V'_p et V''_p les valeurs initiale et finale de ce potentiel, on aura

$$
(7) \quad J_p = \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j \Sigma . D\omega \frac{d}{d\nu} (V'_p - V''_p).
$$

La quantité $\frac{1}{2}\varepsilon j \Sigma . D\omega \frac{dV_p}{d\nu}$ est, d'après notre définition du potentiel, le potentiel du conducteur induit relatif au circuit inducteur. Ainsi « la force électromotrice développée dans un circuit induit par le mouvement relatif d'un inducteur est égale à la différence des deux valeurs que prend le potentiel, au commencement et à la fin du mouvement. »

Les formules (4) et (6) supposent que le circuit inducteur est fermé. Si le conducteur induit est aussi un circuit fermé, on peut opérer sur ce circuit comme nous avons opéré sur le circuit inducteur, et le transformer en une multitude de petits circuits d'aire $D\sigma$ dont la réunion forme une surface qui s'appuie sur ce conducteur.

Alors, soit $D\sigma$ l'élément du courant inducteur supposé mobile; soient X_s, Y_s, Z_s les composantes de l'action électrodynamique du courant induit supposé égal à 1 sur l'élément $D\sigma$; soient $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ les déplacements de $D\sigma$; on aura, d'après la formule (7) du § IV,

$$(8)\qquad J = -\varepsilon'\Sigma.\int_{w_0}^{w_1}(X_s\delta\xi + Y_s\delta\eta + Z_s\delta\zeta)\,D\sigma.$$

Transformons les composantes X_s, Y_s, Z_s comme nous avons transformé X_σ, Y_σ, Z_σ, et nommons dn une petite longueur dirigée suivant la normale à l'élément de surface Do; nous aurons

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} X_s D\sigma &= -\tfrac{1}{2}jS\cdot\frac{d}{dn}[(z_,-\zeta)\,D\eta - (y_,-\eta)\,D\zeta]\,Do_,, \\ Y_s D\sigma &= -\tfrac{1}{2}jS\cdot\frac{d}{dn}[(x_,-\xi)\,D\zeta - (z_,-\zeta)\,D\xi]\,Do_,, \\ Z_s D\sigma &= -\tfrac{1}{2}jS\cdot\frac{d}{dn}[(y_,-\eta)\,D\xi - (x_,-\xi)\,D\eta]\,Do_,, \end{aligned}\right.$$

$$r^2 = (x_,-\xi)^2 + (y_,-\eta)^2 + (z_,-\zeta)^2.$$

En effectuant sur les équations (8) et (9) le genre d'opérations auquel vient d'être soumis le système des équations (1) et (3), on aura

$$J = J_p + J_d,$$

$$(10)\qquad J_p = -\varepsilon' jS.\frac{d}{dn}\int_{w_0}^{w_1}(X\pi\,\delta x + Y\pi\,\delta y + Z\pi\,\delta z),$$

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} X\pi &= -\Sigma\cdot\frac{1}{r^3}[(y-\eta_,)\,D\zeta - (z-\zeta_,)\,D\eta], \\ Y\pi &= -\Sigma\cdot\frac{1}{r^3}[(z-\zeta_,)\,D\xi - (x-\xi_,)\,D\zeta], \\ Z\pi &= -\Sigma\cdot\frac{1}{r^3}[(x-\xi_,)\,D\eta - (y-\eta_,)\,D\xi], \end{aligned}\right.$$

$$r^2 = (x-\xi_,)^2 + (y-\eta_,)^2 + (z-\zeta_,)^2,$$

$$(12)\qquad J_d = -\tfrac{1}{2}\varepsilon' jS.Do\,\frac{d}{dn}\int\left[\cos l\,\frac{x-\xi_,}{r} + \cos m\,\frac{y-\eta_,}{r} + \cos n\,\frac{z-\zeta_,}{r}\right]d\psi.$$

Si l'inducteur est aussi une courbe fermée, on a

$$J_d = 0.$$

Les quantités $jX\pi$, $jY\pi$, $jZ\pi$ représentent les composantes de l'action de l'inducteur

sur l'unité de fluide magnétique accumulée au point (x, y, z) : ce seront donc les dérivées partielles relatives à x, y, z du potentiel de cet inducteur. Si donc on représente ce potentiel par $j\mathrm{V}_\pi$, on aura

$$\mathrm{X}_\pi = \frac{d\mathrm{V}_\pi}{dx}, \quad \mathrm{Y}_\pi = \frac{d\mathrm{V}_\pi}{dy}, \quad \mathrm{Z}_\pi = \frac{d\mathrm{V}_\pi}{dz}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (10) donne, après l'intégration effectuée relativement au chemin parcouru,

$$\mathrm{J}_p = \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j \mathrm{S}.\mathrm{D}o \frac{d}{dn}\left(\mathrm{V}'_\pi - \mathrm{V}''_\pi\right), \tag{13}$$

formule dans laquelle V'_π et V''_π sont les valeurs initiale et finale de V_π.

La quantité $\frac{1}{2}\varepsilon j \mathrm{S}.\mathrm{D}o \dfrac{d\mathrm{V}_\pi}{dn}$ est le potentiel du circuit inducteur sur l'induit supposé parcouru par un courant égal à ε. Ainsi, dans la loi énoncée à la page 148, on peut remplacer le potentiel du circuit induit par celui du circuit inducteur.

Ces deux expressions doivent être identiques. En effet, V_π est le potentiel d'un courant inducteur égal à 1 sur l'unité de fluide magnétique en x, y, z; on peut considérer ce courant inducteur comme équivalent à une surface magnétique d'élément $\mathrm{D}\omega$, comme nous l'avions supposé en premier lieu. Alors ce potentiel doit avoir pour expression [équation (10), § VII], $\Sigma.\dfrac{\varkappa \mathrm{D}\omega}{r}$: or ici il existe deux surfaces magnétiques concentriques qui contiennent des fluides de noms contraires; elles sont séparées par l'intervalle $d\nu$: il faut donc différentier cette expression par rapport à ν et n'en conserver que la variation; ce qui donne, pour le potentiel,

$$\Sigma.\varkappa \mathrm{D}\omega \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} d\nu.$$

Mais la quantité $\varkappa \mathrm{D}\omega\, d\nu$ représente le moment magnétique de l'élément $\mathrm{D}\omega$, lequel doit être égal à $\frac{1}{2}\mathrm{D}\omega$; donc

$$\mathrm{V}_\pi = \tfrac{1}{2}\Sigma.\mathrm{D}\omega \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}.$$

On démontrerait de même

$$\mathrm{V}_p = \tfrac{1}{2}\mathrm{S}.\mathrm{D}o \frac{d\frac{1}{r}}{dn}.$$

Dans ces formules, on a

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

La substitution de ces valeurs dans les équations (7) et (13) mène à une équation

unique

$$(14) \qquad J_p = \tfrac{1}{4}\,\varepsilon\varepsilon' j\,S.\Sigma.\,D\sigma\,D\omega \left[\frac{d^2\frac{1}{r}}{dn\,d\nu}\right].$$

Les crochets indiquent que l'on doit prendre la différence des valeurs de la fonction à l'origine et à la fin du mouvement.

Ainsi le courant d'induction ne dépend que de la variation du potentiel. Il en résulte que toute circonstance qui altérera la valeur du potentiel produira un courant induit; si, par exemple, le courant inducteur passe de l'intensité j' à l'intensité j'', en nommant le courant induit $J^{(\gamma)}$, on aura

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} J^{(\gamma)} &= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\varepsilon'(j'-j'')\,S.\,D\sigma\,\frac{dV_\pi}{dn} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\varepsilon'(j'-j'')\,\Sigma.\,D\omega\,\frac{dV_p}{d\nu} \\ &= \tfrac{1}{4}\,\varepsilon\varepsilon'(j'-j'')\,S.\Sigma.\,D\sigma\,D\omega\,\frac{d^2\frac{1}{r}}{dn\,d\nu}. \end{aligned}\right.$$

Il reste à savoir si ces formules sont applicables au cas d'invasion ou de cessation subite d'un courant; et c'est sur quoi l'expérience devra décider.

Toutes les formules démontrées jusqu'ici supposent que la rapidité des changements de lieu dans l'espace ou des changements d'intensité est beaucoup plus faible que la rapidité avec laquelle l'induction se développe dans le circuit induit. Elles ne sont donc rigoureusement applicables que dans le cas du développement lent des courants. En les étendant néanmoins au cas des courants qui se développent instantanément, on verrait que l'induction est la même que si le courant s'était subitement transporté d'une distance infinie au lieu de l'espace où il s'est formé.

§ XI.

La valeur du courant induit dépend d'une triple intégration, l'une relative au circuit du courant inducteur, une autre au circuit du courant induit, la troisième au chemin parcouru par chacun des éléments du circuit mobile. L'introduction du potentiel des surfaces magnétiques des circuits fait disparaître cette dernière intégration, mais elle remplace la double intégrale restante, par deux doubles intégrales dépendant de ces surfaces. Je vais montrer que si l'un des deux circuits est fermé, l'intégrale triple peut être réduite à une intégrale double, et même à une simple quadrature dans le cas où le circuit fermé aurait de très-petites dimensions par rapport à la distance qui le sépare de l'autre circuit.

Soit s l'arc du conducteur induit qui se meut vis-à-vis du circuit inducteur fixe et d'arc σ; l'équation (6) du § III donne

$$(1) \qquad J = -\,\varepsilon\varepsilon'\,S.\int_{w_0}^{w_1} (X_\sigma\,\delta x + Y_\sigma\,\delta y + Z_\sigma\,\delta z)\,Ds;$$

$X_\sigma Ds$, $Y_\sigma Ds$, $Z_\sigma Ds$ sont les trois composantes de l'action électrodynamique exercée par l'arc σ sur l'élément Ds parcouru par un courant égal à 1 ; δx, δy, δz sont les trois projections du chemin infiniment petit $\delta\omega$ parcouru par cet élément. Le courant inducteur étant fermé et d'intensité j, on a, par les formules d'Ampère,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
X_\sigma Ds &= \tfrac{1}{2} j \Sigma \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\xi - \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\zeta\right) Dz - \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} D\eta - \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} D\xi\right) Dy\right],\\
Y_\sigma Ds &= \tfrac{1}{2} j \Sigma \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} D\eta - \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} D\xi\right) Dx - \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} D\zeta - \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\eta\right) Dz\right].\\
Z_\sigma Ds &= \tfrac{1}{2} j \Sigma \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} D\zeta - \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\eta\right) Dy - \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} D\xi - \frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} D\zeta\right) Dx\right],
\end{aligned}\right.$$

r étant donné par l'équation

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (1) et ordonnons le second membre suivant $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$; nous aurons, pour le terme dépendant de $D\xi$,

$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j\Sigma.S.\int\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} Dx + \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta} Dy + \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} Dz\right)\delta x\\
&-\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi}\delta x + \frac{d\frac{1}{r}}{d\eta}\delta y + \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta}\delta z\right) Dx
\end{aligned}\right\} D\xi.$$

On obtiendrait de même les termes en $D\eta$, $D\zeta$ en remplaçant les deux facteurs δx, Dx extérieurs aux termes entre parenthèses par δy, Dy, ou par δz, Dz, et en changeant en même temps $D\xi$ en $D\eta$ ou en $D\zeta$.

On peut remplacer $\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi}$, $\frac{d\frac{1}{r}}{d\eta}$, $\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta}$ par $-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}$, $-\frac{d\frac{1}{r}}{dy}$, $-\frac{d\frac{1}{r}}{dz}$. Ce changement fait, le terme ci-dessus se décompose dans les deux suivants :

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j\Sigma\ S.\int\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx} Dx + \frac{d\frac{1}{r}}{dy} Dy + \frac{d\frac{1}{r}}{dz} Dz\right)\delta x\, D\xi,\\
&-\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j\Sigma.S.\int\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\delta x + \frac{d\frac{1}{r}}{dy}\delta y + \frac{d\frac{1}{r}}{\delta z}\delta z\right) Dx\, D\xi.
\end{aligned}\right.$$

Or on a, en intégrant par parties relativement à l'arc s,

$$S.\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}Dx+\frac{d\frac{1}{r}}{dy}Dy+\frac{d\frac{1}{r}}{dz}Dz\right)\delta x=\frac{1}{r}\delta x-S.\frac{1}{r}\frac{D\delta x}{Ds}Ds,$$

et, en intégrant par parties relativement au chemin ϖ décrit par l'élément Ds,

$$\int\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\delta x+\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\delta y+\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\delta z\right)Dx=\frac{1}{r}Dx-\int\frac{1}{r}\frac{\delta Dx}{Ds}Ds.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression (3) et remarquant que

$$\int S.\frac{1}{r}\frac{D\delta x}{Ds}Ds=S.\int\frac{1}{r}\frac{\delta Dx}{Ds}Ds,$$

on aura, pour le terme dépendant de $D\xi$,

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j\Sigma.\left(\int\frac{\delta x}{r}-S.\frac{Dx}{r}\right)D\xi,$$

et la valeur complète de J deviendra

$$(4)\qquad J=\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j\left\{\begin{array}{l}\Sigma.\int_{s'}^{s''}\dfrac{D\xi\,\delta x+D\eta\,\delta y+D\zeta\,\delta z}{r\delta s}\delta s\\[2ex]-\Sigma\, S_{w'}^{w''}\dfrac{D\xi\,\delta x+D\eta\,\delta y+Dz\,\delta z}{r\delta\varpi}D\varpi\end{array}\right\}.$$

Le signe $\int_{s'}^{s''}$ indique que l'on doit prendre la différence des valeurs de l'intégrale $\int$ aux deux extrémités de l'arc s, et le signe $S_{w'}^{w''}$ indique que l'on doit prendre la différence des valeurs de l'intégrale S aux deux extrémités du chemin parcouru.

Je vais examiner d'abord le cas où le circuit mobile forme une courbe fermée, et celui où le chemin parcouru est aussi fermé, le circuit revenant, à la fin de son mouvement, occuper sa position première.

Premier cas. — Si le circuit induit est fermé, on a

$$\int_{s'}^{s''}=0,$$

et, par conséquent,

$$(5)\qquad J=-\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j\Sigma.S_{w'}^{w''}\frac{D\xi\,Dx+D\eta\,Dy+D\zeta\,Dz}{rD\varpi}D\varpi.$$

Mais nous savons déjà, d'après ce qui a été dit dans le § X, que l'action électromotrice

exercée par un circuit fermé sur un autre circuit est égale à la différence des valeurs que le potentiel du courant inducteur acquiert dans les positions initiale et finale du circuit induit supposé parcouru par un courant égal à ε.

Il en résulte que l'on pourra représenter ce potentiel par l'expression

$$\tfrac{1}{2}\,\varepsilon j\,\Sigma.\mathrm{S}.\frac{1}{r}(\mathrm{D}\xi\,\mathrm{D}x + \mathrm{D}\eta\,\mathrm{D}y + \mathrm{D}\zeta\,\mathrm{D}z) = \mathrm{V}.$$

Ainsi, lorsque deux circuits fermés parcourus par des courants égaux à l'unité agissent l'un sur l'autre, « le potentiel du premier relativement au second est le même que celui du second relativement au premier, » et la valeur commune de ces potentiels a pour expression

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma.\mathrm{S}.\frac{1}{r}(\mathrm{D}\xi\,\mathrm{D}x + \mathrm{D}\eta\,\mathrm{D}y + \mathrm{D}\zeta\,\mathrm{D}z) = \tfrac{1}{2}\,\Sigma.\mathrm{S}.\frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{D}\xi}{\mathrm{D}\sigma}\frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}s} + \frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}\sigma}\frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}s} + \frac{\mathrm{D}\zeta}{\mathrm{D}\sigma}\frac{\mathrm{D}z}{\mathrm{D}s}\right)\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{D}s.$$

Si donc l'on nomme $(\mathrm{D}\sigma, \mathrm{D}s)$ l'angle formé par les éléments $\mathrm{D}\sigma$, $\mathrm{D}s$ entre eux, on aura, pour le potentiel, $\tfrac{1}{2}\,\Sigma.\mathrm{S}.\frac{1}{r}\cos(\mathrm{D}\sigma, \mathrm{D}s)\,\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{D}s$; c'est-à-dire « qu'il sera égal à la demi-somme des produits quatre à quatre des deux éléments $\mathrm{D}\sigma$, $\mathrm{D}s$, du cosinus de leur inclinaison relative et de la raison inverse de leur distance r. »

Deuxième cas. — Si la route suivie par le conducteur induit est rentrante sur elle-même, on a

$$\mathrm{J} = \varepsilon\varepsilon' j\,\Sigma.\int_{s'}^{s''}\frac{\mathrm{D}\xi\,\delta x + \mathrm{D}\eta\,\delta y + \mathrm{D}\zeta\,\delta z}{r\delta s}\,\delta s; \tag{6}$$

c'est-à-dire que J est égal à la différence des deux valeurs que prend l'expression

$$\varepsilon\varepsilon' j\,\Sigma.\int\frac{1}{r}(\mathrm{D}\xi\,\delta x + \mathrm{D}\eta\,\delta y + \mathrm{D}\zeta\,\delta z),$$

lorsqu'on y considère δx, δy, δz comme se rapportant successivement: 1° au chemin parcouru par l'une des deux extrémités du conducteur induit; 2° au chemin parcouru par l'autre extrémité.

Considérons chacun de ces deux chemins comme étant des conducteurs matériels fermés et susceptibles d'induction, ce qui permettra de remplacer pour le moment δx, δy, δz par $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$, et $\int$ par S. Alors, en nous reportant au cas précédent, nous verrons que la force électromotrice développée dans ce cas idéal sera égale à la différence des valeurs du potentiel du circuit inducteur sur le circuit fermé décrit par l'une des extrémités et sur le circuit fermé décrit par l'autre, chacun de ces deux derniers circuits étant supposé parcouru par le courant ε.

Ainsi, dans ce cas, la force électromotrice ne dépend que du chemin décrit par chacune des deux extrémités de l'arc, et nullement de la forme du conducteur induit.

Si, dans ce cas, le conducteur venait à se fermer sur lui-même, la force électromotrice, développée pendant une révolution complète, serait égale à zéro.

Troisième cas. — Je reprends maintenant le cas général où un circuit non fermé a parcouru un chemin qui ne le ramène pas à sa position première. Alors, en matérialisant par la pensée les deux arcs décrits par chacune des deux extrémités, on obtient un quatrilatère courbe formé : 1° par les deux courbes s', s'' avec lesquelles vient successivement coïncider l'arc s au commencement et à la fin du mouvement, et 2° par les deux courbes e', e'' dont l'une a été décrite par l'une des extrémités de l'arc s, et l'autre par l'autre extrémité du même arc. Comme la formule (4) se décompose naturellement en quatre termes dont les deux premiers (*voyez* le deuxième cas) sont, après suppression du facteur ε', les valeurs du potentiel du circuit inducteur par rapport aux courbes e', e'' parcourues par le courant ε, et dont les deux derniers (*voyez* le premier cas) sont, après suppression de ε', les valeurs du même potentiel relativement aux courbes s', s'' parcourues par ce même courant, on voit que l'on peut énoncer la loi suivante :

« La force électromotrice d'induction développée dans l'arc s par un déplacement de cet arc tel, qu'il décrive une surface limitée par un quadrilatère courbe $s'e's''e''$, est égale au potentiel du circuit inducteur sur le circuit fermé et quadrilatère de cette surface supposé parcouru par un courant continu et égal à ε. »

Il résulte de la continuité du quadrilatère, qu'en e' le courant ε est de direction contraire à celle du courant en e'', et qu'il en est de même pour s' et s''.

Cette loi générale comprend, comme cas particuliers, les deux cas examinés en premier lieu ; les lois qui s'y rapportent s'en déduisent comme de simples corollaires.

La même loi subsiste encore si l'on remplace le courant inducteur fixe par un système de plusieurs courants inducteurs fixes, et, par conséquent, par un solénoïde, ou même par un aimant.

Cette loi pourra aussi être appliquée, quel que soit celui des deux circuits qui soit fermé ; car la force électromotrice développée par le circuit A en B est toujours la même que celle développée par B en A, pourvu que l'intensité du courant reste la même dans le circuit qui induit : sous cette condition, il est permis d'échanger entre eux les circuits induit et inducteur. On sait aussi que l'on peut substituer au mouvement d'un des circuits le mouvement inverse de l'autre : ainsi la règle sera toujours applicable pourvu que l'un des deux circuits soit fermé.

§ XII.

Nous venons de voir que le potentiel V d'un conducteur fermé σ relativement à un autre conducteur fermé s, les deux courants qui les parcourent étant égaux à l'unité, peut être représenté par

$$(1)\qquad V = \tfrac{1}{2}\,S.\Sigma.\frac{1}{r}\,(Dx\,D\xi + Dy\,D\eta + Dz\,D\zeta).$$

Je vais développer cette expression en supposant que σ soit une courbe plane et de petites dimensions comparativement à la distance r.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité de l'arc de la courbe σ, et

$$(2)\qquad \xi+\alpha,\quad \eta+\beta,\quad \zeta+\gamma,$$

celles d'un point de son contour : ξ, η, ζ devenant des quantités constantes, on devra remplacer, dans l'équation (1), $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$ par $D\alpha$, $D\beta$, $D\gamma$.

Menons une normale au plan de la courbe σ, et soit ν l'angle que cette normale fait avec l'axe des ζ, ou plutôt des γ. Prenons cette normale pour l'un des axes d'un système de nouvelles coordonnées α', β', γ', par exemple pour l'axe des γ'. Soit ω l'angle que forme le plan des axes des γ et des γ' avec l'axe des α, et plaçons à l'intersection de ce même plan et du plan de la courbe σ l'axe des β' ; l'axe des α' sera situé dans le plan de la courbe σ, et l'on aura

$$\alpha=\alpha'\sin\omega-\beta'\cos\nu\cos\omega+\gamma'\sin\nu\cos\omega,$$

$$\beta=-\alpha'\cos\omega-\beta'\cos\nu\sin\omega+\gamma'\sin\nu\sin\omega,$$

$$\gamma=\beta'\sin\nu+\gamma'\cos\nu.$$

Rapportons la courbe σ à des coordonnées polaires situées dans son plan, plaçons l'origine des rayons vecteurs ρ au centre (ξ,η,ζ), et prenons l'axe des α' pour origine des angles polaires φ ; nous aurons, sur la courbe σ,

$$\alpha'=\rho\cos\varphi,\quad \beta'=\rho\sin\varphi,\quad \gamma'=0,$$

et ainsi, pour tous les points de cette courbe,

$$(3)\qquad \begin{cases}\alpha=\rho(\sin\omega\cos\varphi-\cos\nu\cos\omega\sin\varphi),\\ \beta=-\rho(\cos\omega\cos\varphi+\cos\nu\sin\omega\sin\varphi),\\ \gamma=\rho\sin\nu\sin\varphi.\end{cases}$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{[(x-\xi-\alpha)^2+(y-\eta-\beta)^2+(z-\zeta-\gamma)^2]^{\frac{1}{2}}};$$

et, en développant cette expression suivant les puissances de α, β, γ, et négligeant les termes en α^2, β^2, γ^2, elle devient

$$\frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}}+\frac{(x-\xi)\alpha+(y-\eta)\beta+(z-\zeta)\gamma}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation (1), et remarquons qu'en intégrant dans toute l'étendue de la courbe Σ, on a

$$\Sigma.D\alpha=0,\quad \Sigma.D\beta=0,\quad \Sigma.D\gamma=0,$$

ce qui fait disparaître le premier des deux termes provenant de la substitution : nous

aurons

$$(4)\qquad V = \tfrac{1}{2}S.\Sigma.\frac{(DxD\alpha + DyD\beta + DzD\gamma)[(x-\xi)\alpha + (y-\beta)\eta + (z-\zeta)\gamma]}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

On a ensuite, l'origine des coordonnées polaires étant au centre de gravité de l'arc σ,

$$\Sigma.\alpha D\alpha = 0,\quad \Sigma.\beta d\beta = 0,\quad \Sigma.\gamma d\gamma = 0,$$
$$\Sigma.\alpha D\beta = -\Sigma.\beta D\alpha = -\tfrac{1}{2}\cos\nu\,\Sigma\,\rho^2 D\varphi,$$
$$\Sigma.\alpha D\gamma = -\Sigma.\gamma D\alpha = \tfrac{1}{2}\sin\nu\sin\omega\,\Sigma.\rho^2 D\varphi,$$
$$\Sigma\,\beta D\gamma = -\Sigma.\gamma D\beta = -\tfrac{1}{2}\sin\nu\cos\omega\,\Sigma.\rho^2 D\varphi.$$

Donc enfin

$$(5)\qquad V = \tfrac{1}{4}(\Sigma.\rho^2 D\varphi)S.\frac{1}{r^3}\left\{\begin{array}{l} \cos\nu[(y-\eta)Dx - (x-\xi)Dy] \\ + \sin\nu\sin\omega[(x-\xi)Dz - (z-\zeta)Dx] \\ + \sin\nu\cos\omega[(z-\zeta)Dy - (y-\eta)Dz] \end{array}\right\}.$$

L'intégrale $\frac{1}{2}\Sigma.\rho^2 D\varphi$ représente l'aire du petit circuit enveloppé par la courbe σ; je la représenterai par λ. Les facteurs $\cos\nu$, $\sin\nu\sin\omega$, $\sin\nu\cos\omega$ sont les cosinus des angles que la normale au circuit fait avec les trois axes des z, des y et des x. Supposons maintenant que le point (ξ, η, ζ) vienne à se déplacer, en restant sur cette normale, et que le déplacement soit égal à dN : on aura évidemment

$$(6)\qquad \cos\nu = \frac{d\zeta}{dN},\quad \sin\nu\sin\omega = \frac{d\eta}{dN},\quad \sin\nu\cos\omega = \frac{d\xi}{dN}.$$

En outre, on peut considérer le facteur $\frac{1}{r^3}[(y-\eta)Dx - (x-\xi)Dy]$ comme étant le résultat de la différentiation par rapport à ζ de la quantité

$$\left(1 - \frac{z-\zeta}{r}\right)\left[\frac{(y-\eta)Dx - (x-\xi)Dy}{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2}\right],$$

attendu que l'on a

$$\frac{1}{d\zeta}.d\left(1 - \frac{z-\zeta}{r}\right) = \frac{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2}{r^3}.$$

De même, on peut considérer $\frac{1}{r^3}[(x-\xi)Dz - (z-\zeta)Dx]$ comme étant la dérivée, par rapport à η, de

$$\left(1 - \frac{y-\eta}{r}\right)\left[\frac{(x-\xi)Dz - (z-\zeta)Dx}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}\right],$$

et $\frac{1}{r^3}\{[(z-\zeta)Dy - (y-\eta)Dz]\}$ comme étant la dérivée, par rapport à ξ, de l'ex-

pression

$$\left(1 - \frac{x-\xi}{r}\right)\left[\frac{(z-\zeta)\,\mathrm{D}y - (y-\eta)\,\mathrm{D}z}{(z-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}\right].$$

Avant de substituer ces valeurs dans l'équation (5), nous écrirons

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}.\left(1 - \frac{x-\xi}{r}\right)\frac{(z-\zeta)\,\mathrm{D}y - (y-\eta)\,\mathrm{D}z}{(z-\zeta)^2 + (y-\eta)^2} = \mathrm{K},\\ &\mathrm{S}.\left(1 - \frac{y-\eta}{r}\right)\frac{(x-\xi)\,\mathrm{D}z - (z-\zeta)\,\mathrm{D}x}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2} = \mathrm{L},\\ &\mathrm{S}.\left(1 - \frac{z-\zeta}{r}\right)\frac{(y-\eta)\,\mathrm{D}x - (x-\xi)\,\mathrm{D}y}{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2} = \mathrm{M}. \end{aligned}\right.$$

L'équation (5) devient alors

$$(8)\qquad \mathrm{V} = \tfrac{1}{2}\lambda\left\{\frac{d\zeta}{d\mathrm{N}}\frac{d\mathrm{M}}{d\zeta} + \frac{d\eta}{d\mathrm{N}}\frac{d\mathrm{L}}{d\eta} + \frac{d\xi}{d\mathrm{N}}\frac{d\mathrm{K}}{d\xi}\right\}.$$

Supposons maintenant que l'arc s soit une courbe fermée; je dis que l'on a

$$\mathrm{K} = \mathrm{L} = \mathrm{M}.$$

En effet, chacune des expressions K, L, M représente la *surface apparente* de s prise du point (ξ, η, ζ), c'est-à-dire l'aire sphérique interceptée, sur la sphère de rayon 1 dont le centre est en (ξ, η, ζ), par le cône qui a ce centre pour sommet et s pour base [*].

En choisissant la lettre K pour désigner cette surface apparente, l'équation (8) se change en

$$(9)\qquad \mathrm{V} = \tfrac{1}{2}\lambda\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{N}}.$$

Ainsi « le potentiel du très-petit circuit plan et fermé λ sur le circuit fermé s, les » deux circuits étant parcourus par des courants égaux à l'unité, est égal au produit

---

[*] Car $(y-\eta)\,\mathrm{D}x - (x-\xi)\,\mathrm{D}y$ est la double aire de la projection sur le plan des xy du triangle ayant (ξ, η, ζ) pour sommet et $\mathrm{D}s$ pour base, ainsi $\frac{(y-\eta)\,\mathrm{D}x - (x-\xi)\,\mathrm{D}y}{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2}$ est l'angle formé entre les deux plans passant par la parallèle à l'axe des z menée par ξ, η, ζ et par chacune des extrémités de $\mathrm{D}s$. Soit $(\mathrm{D}s)$ ce que devient $\mathrm{D}s$ ramenée par ses rayons vecteurs sur la sphère de rayon 1 : si du point de rencontre de cette sphère avec la parallèle aux z menée par son centre, on mène deux arcs de grand cercle aux extrémités de $(\mathrm{D}s)$, la projection de cette portion de fuseau sur cette parallèle aura pour longueur $1 - \frac{z-\zeta}{r}$, et l'on sait qu'en la multipliant par l'angle compris entre les deux arcs de grands cercles, on aura l'aire de cette portion de fuseau. L'intégrale de toutes ces aires sera l'aire apparente de la courbe s; ce sera la valeur de M. On le démontrerait de la même manière pour les quantités K et L. A. B.

» de $\frac{1}{2}\lambda$ par le coefficient différentiel de la surface apparente de s vue du centre de λ,
» ce coefficient différentiel étant pris par rapport à la normale au circuit λ. »

Supposons que le circuit λ soit la section d'un canal cylindrique, ayant la normale N pour axe, et considérons une série de sections équidistantes toutes égales à λ, et toutes perpendiculaires à cet axe: α étant le nombre des circuits contenus dans l'unité de longueur de la normale, le nombre des circuits contenus dans la longueur δN sera $\alpha\delta N$, et le potentiel d'un tel système de circuits sera

$$\frac{1}{2}\alpha\lambda \frac{dK}{dN}\delta N.$$

Or ce système n'est autre chose qu'un solénoïde infiniment petit. Si ce solénoïde s'étend depuis $N = N'$ jusqu'à $N = N''$, en nommant K' et K'' les valeurs de K correspondant aux deux extrémités du solénoïde, le potentiel de ce solénoïde fini sera

$$\frac{1}{2}\alpha\lambda(K'' - K'). \tag{10}$$

Si l'extrémité N' est située à l'infini, le solénoïde devient illimité et unipolaire, et son potentiel aura pour valeur générale

$$\frac{1}{2}\alpha\lambda K. \tag{11}$$

Concevons donc qu'au lieu d'être égal à 1, le courant des spires du solénoïde ait une intensité j; le potentiel du pôle de ce solénoïde unipolaire sera

$$\frac{1}{2}\alpha\lambda j K;$$

or, comme dans la théorie des fluides magnétiques, on substitue à un pôle de solénoïde (α, λ, j) un pôle d'aimant dont la quantité $\varkappa'$ de fluide libre est égale à $\frac{1}{2}\alpha\lambda j$, on voit que le potentiel d'un tel pôle d'aimant aura pour valeur

$$\varkappa' K. \tag{12}$$

Le potentiel d'un aimant bipolaire serait de même

$$\varkappa'(K'' - K'), \tag{13}$$

K'' et K' étant les surfaces apparentes du circuit s prises de chacun des deux pôles de l'aimant, et le circuit s étant toujours supposé parcouru par un courant égal à 1.

On déduit de là facilement la valeur du potentiel d'un aimant quelconque sur un circuit fermé s; car, quelle que soit la distribution interne du fluide, on peut toujours supposer, quant à ses effets extérieurs, que cette distribution est toute superficielle. Si donc on nomme $\varkappa D\omega$ la quantité de fluide positif accumulé sur l'élément $D\omega$ de la surface, K étant la surface apparente de s prise du centre de cet élément $D\omega$, le potentiel de tout l'aimant sera représenté par l'intégrale

$$S.\varkappa K D\omega, \tag{14}$$

étendue à toute la surface de l'aimant.

En transportant ces valeurs du potentiel dans l'équation (1) du § IX, où $\varkappa V'$, $\varkappa V''$ étaient les valeurs du potentiel aux deux extrémités de la route parcourue, on aura, pour le courant induit produit dans l'arc s par le déplacement de l'aimant,

$$(15) \qquad J = \varepsilon\varepsilon' S.\varkappa(K' - K'')D\omega,$$

K' et K'' étant les valeurs des surfaces apparentes aux deux extrémités de la route.

Si le conducteur induit, n'étant pas fermé, a parcouru une route qui le ramène à son point de départ, la même formule sera applicable; mais alors K' et K'' représentent les surfaces apparentes des circuits fermés décrits par chacune des deux extrémités de s.

Enfin, si l'on écrit

$$(15\ bis) \qquad J = \varepsilon\varepsilon' S.\varkappa K D\omega,$$

cette formule s'appliquera au cas où le conducteur s aura décrit un chemin quelconque, ses extrémités ayant parcouru les arcs e', e'', lesquels, avec les positions initiale et finale s', s'', complètent le quadrilatère curviligne $s'e's''e''$. Il faudra concevoir que dans l'équation (15 *bis*), K est la surface apparente de ce quadrilatère curviligne $s'e's''e''$, vu du centre de l'élément $D\omega$.

Si l'aimant, sans changer de place, éprouvait une variation dans son aimantation, l'effet de cette variation serait de substituer à la fonction $\varkappa'$ une nouvelle fonction $\varkappa''$: alors le courant induit serait, d'après l'équation (4) du § IX, égal à

$$(16) \qquad J^{(\mu)} = \varepsilon\varepsilon' S.(\varkappa' - \varkappa'')KD\omega.$$

Si l'aimant, d'abord désaimanté, arrivait à un état magnétique définitif représenté par la fonction $\varkappa$, le courant induit, résultat de ce changement, serait

$$(17) \qquad J^{(\mu)} = -\varepsilon\varepsilon' S.\varkappa K D\omega.$$

D'après la définition que nous avons donnée de la quantité K, le cône dont l'intersection avec la surface sphérique de rayon 1 doit déterminer la surface apparente K partage cette surface en deux segments complémentaires l'un de l'autre; ces deux surfaces apparentes complémentaires sont telles, que l'une étant égale à K, l'autre est égale à $4\pi - K$. Il est utile de posséder une règle générale qui permette de savoir laquelle de ces deux valeurs doit être préférée, et quel est le signe qui doit lui être attribué.

Pour cela, je reprends l'expression

$$K = S.\left(1 - \frac{z - \zeta}{r}\right)\frac{(y - \eta)Dx - (x - \xi)Dy}{(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2}.$$

En nommant θ l'angle formé par le rayon vecteur r mené du pôle (ξ, η, ζ) au point x, y, z, avec une parallèle aux z menée par ce pôle, le premier facteur sous le signe S prend la forme $1 - \cos\theta$. En nommant φ l'angle formé par le plan de l'angle θ avec un

plan fixe passant par l'axe des z, le second facteur est égal à $d\varphi$ (*voyez* la note de la page 158). On a donc

$$(18)\qquad K = S.(1 - \cos\theta)\,d\varphi,$$

l'intégrale devant s'étendre à tous les éléments de la courbe s. Pour simplifier, je supposerai celle-ci plane et convexe sur tout son pourtour.

Si la parallèle aux z menée par le pôle (ξ, η, ζ) rencontre le plan de la courbe s dans la partie interne à la courbe, les limites de l'intégration par rapport à φ sont o et 2π; alors, en nommant θ' et θ'' les deux valeurs de θ correspondant à φ et à $180° + \varphi$, on peut écrire

$$(19)\qquad K = S_0^{\pi}(2 - \cos\theta - \cos\theta')\,d\varphi.$$

Si, au contraire, cette parallèle est extérieure à la courbe s, on a deux valeurs de θ, savoir θ et θ', correspondant à la même valeur de φ, et l'on peut écrire

$$(20)\qquad K = S_{\varphi'}^{\varphi''}(\cos\theta - \cos\theta')\,d\varphi,$$

φ' et φ'' étant les deux valeurs de φ pour lesquelles $\theta = \theta'$, c'est-à-dire pour lesquelles le plan des angles θ et θ' devient tangent à la courbe.

Je nommerai côté positif du plan de la courbe s, la partie de l'espace située d'un même côté de ce plan et qui renferme le demi-axe des z positives; côté négatif, l'autre moitié qui contient le demi-axe des z négatives. Je considérerai le pôle (ξ, η, ζ) comme mobile, et je nommerai (K) la plus petite des deux valeurs que l'on peut adopter pour la surface apparente de s. Alors, tant que le pôle reste situé d'un même côté du plan de la courbe s, il n'existe pas d'ambiguïté relativement aux valeurs initiale et finale de K. Mais il peut arriver que le pôle mobile traverse ce plan: si le pôle, au moment de ce passage, est intérieur au circuit s, K devient égal à 2π; tandis que si ce passage se fait en dehors du circuit, K passe par la valeur $K = 0$.

Soient donc ϖ' un point situé dans la partie positive de l'espace, ϖ'' un point situé dans la partie négative.

Si le pôle va de ϖ' à ϖ'' en traversant le circuit, on aura

$$K' = (K'), \qquad K'' = 4\pi - (K'').$$

S'il va de ϖ' à ϖ'' sans traverser le circuit, on aura

$$K' = (K'), \qquad K'' = -(K'').$$

Si le pôle va de ϖ'' à ϖ' en traversant le circuit, on aura

$$K'' = -(K''), \qquad K' = -4\pi + (K').$$

S'il va de ϖ'' à ϖ' sans le traverser, on aura

$$K'' = -(K''), \qquad K' = (K').$$

On peut donc écrire, en général, pour le point ω,

$$K = \pm (K), \tag{21}$$

le signe + devant être préféré si le point ω est du côté positif, le signe — s'il est du côté négatif. Mais, en outre, en calculant la valeur définitive de la différence des potentiels lorsque le pôle va d'un point quelconque ω' à un autre point quelconque ω'', il faut avoir soin d'ajouter à la différence calculée d'après l'équation (21) autant de fois 4π que le pôle a traversé l'aire *intérieure* du circuit en allant du côté positif au côté négatif, et d'en retrancher 4π autant de fois que le pôle a traversé la même aire dans la direction opposée; de sorte que si l'on nomme p le premier et n le second de ces deux nombres, la correction à faire sera

$$+ 4p\pi - 4n\pi.$$

Cette correction transportée dans l'équation (15) devra changer de signe, et l'on aura alors

$$J = \varepsilon\varepsilon'\varkappa \left\{ \pm (K') - [\pm (K'')] + 4(n-p)\pi \right\}. \tag{22}$$

Si le pôle revient à son point de départ, on a simplement

$$J = \varepsilon\varepsilon'\varkappa . 4(n-p)\pi. \tag{23}$$

Ainsi le courant induit dans un conducteur plan s par le mouvement d'un pôle magnétique qui parcourt une route fermée est nul, si cette route ne traverse pas le circuit; mais chaque fois que le pôle traversera l'aire s du côté positif vers le côté négatif, il se développera une force électromotrice $-4\pi\varepsilon\varkappa$, et chaque fois que le pôle traversera la même aire en sens inverse, il se développera la force électromotrice $+4\pi\varepsilon\varkappa$.

§ XIII.

Les exemples suivants serviront à montrer l'usage que l'on peut faire des formules précédentes.

I. Considérons d'abord les courants d'induction développés dans des circuits fermés par le magnétisme de la terre. Ici les centres d'action des forces électrodynamiques sont très-éloignés par rapport aux dimensions du conducteur; la translation ne peut développer aucun courant induit: c'est donc à la rotation qu'il faut recourir.

On sait que l'on peut remplacer fictivement le magnétisme terrestre, soit par un aimant convenablement placé sur le prolongement de la ligne d'inclinaison, soit plus simplement encore par un pôle magnétique unique P possédant une quantité $\varkappa$ de fluide libre, et placé sur la ligne d'inclinaison à une distance r très-grande par rapport aux dimensions du conducteur, la quantité $\frac{\varkappa}{r^2}$ étant ce que l'on a appelé l'intensité magnétique du globe au lieu de l'observation. On peut alors appliquer la formule

$$J = \varepsilon\varepsilon'\varkappa (K' - K''), \tag{1}$$

K' et K'' étant les surfaces apparentes du circuit induit s vu du pôle P, au commencement et à la fin du mouvement. Supposons que le conducteur s forme un circuit plan d'aire F, et soit ν l'angle variable formé par l'une des deux moitiés de la normale au circuit avec la partie plongeante de la ligne d'inclinaison; en nommant ν' et ν'' les deux valeurs de ν au commencement et à la fin, on aura

$$K' = \frac{F}{r^2}\cos\nu', \quad K'' = \frac{F}{r^2}\cos\nu''.$$

Si $\cos\nu'$ et $\cos\nu''$ sont de signes différents, cela voudra dire qu'en substituant le mouvement du pôle au mouvement du conducteur, le pôle a traversé le plan de ce dernier et a passé du côté positif au côté négatif du plan du circuit, ou *vice versâ*: lorsque ce cas se présente, le plan de la courbe est coupé par le pôle, à l'extérieur de l'aire F; il n'y a donc pas lieu d'appliquer la correction indiquée à la fin du paragraphe précédent. Donc

$$(2) \qquad J = \varepsilon\varepsilon' \frac{\varkappa F}{r^2}(\cos\nu' - \cos\nu'').$$

Soient (a, r) l'angle formé par l'axe de rotation du circuit avec la ligne d'inclinaison r; c l'angle formé par l'axe avec la normale; φ l'angle de position du plan passant par l'axe de rotation et par la normale, le départ des angles φ étant ainsi choisi, que l'on ait $\varphi = 0$, lorsque ce plan contient r; on aura

$$\cos\nu = \cos(a, r)\cos c + \sin(a, r)\sin c\cos\varphi.$$

Donc, lorsque la rotation amènera la normale au circuit de la position φ' à la position φ'', on aura pour le courant produit, en écrivant $\frac{\varkappa}{r^2} = M$,

$$(3) \qquad J = \varepsilon\varepsilon' MF\sin(a, r)\sin c(\cos\varphi' - \cos\varphi'').$$

Après une rotation complète, l'action totale J du courant devient égale à zéro; mais l'emploi d'un commutateur peut modifier ce résultat. Le commutateur devra renverser le courant au moment où le courant élémentaire change de signe, c'est-à-dire au moment où le courant J devient un maximum ou un minimum.

Dans l'équation (3), φ' a une valeur arbitraire, mais constante, et φ'' varie de 0 à 360 degrés: c'est donc lorsque $\varphi'' = 0°$, $\varphi'' = 180°$, que le renversement devra s'effectuer. Le commutateur satisfaisant à cette condition pour chaque demi-révolution, le courant induit total sera donné par la formule (3), dans laquelle on aura dû poser $\varphi' = 0°$, $\varphi'' = 180°$. Donc, pour une demi-révolution,

$$(4) \qquad J = 2\varepsilon\varepsilon' MF\sin(a, r)\sin c.$$

Pour obtenir le maximum d'effet, il faut que $c = 90°$, c'est-à-dire que l'axe de rotation soit situé dans le plan même du conducteur.

Cette condition étant satisfaite, si l'axe de rotation est horizontal, et dirigé suivant

la ligne est-ouest magnétique, on a $(a, r) = 90^\circ$,

$$J = 2\varepsilon\varepsilon' \mathrm{MF}. \tag{5}$$

Si l'axe toujours horizontal est dirigé suivant la méridienne magnétique, j étant l'inclinaison, on a $(a, r) = j$,

$$J = 2\varepsilon\varepsilon' \mathrm{MF} \sin j. \tag{6}$$

Dans le cas de l'axe vertical, on aurait

$$J = 2\varepsilon\varepsilon' \mathrm{MF} \cos j. \tag{7}$$

On peut consulter à ce sujet le Mémoire de Weber sur l'Inclinatoire d'induction.

II. Lorsque l'on veut faire usage des formules (14), (15), (16) ou (17) du paragraphe précédent, il faut connaître la forme de la fonction $\varkappa$, qui représente la distribution du magnétisme à la surface de l'aimant. Comme cette distribution n'est connue qu'approximativement, je me bornerai à examiner le cas d'un aimant cylindrique ou prismatique, et je supposerai qu'il n'y ait de fluide que sur les deux bases, le fluide austral étant uniformément répandu sur celle des deux bases qui, libre, se dirigerait vers le nord, et le fluide boréal sur la face opposée [*]. Je nommerai df l'un des éléments de la surface de ces bases, et je supposerai que les dimensions de ces bases soient assez petites pour que les valeurs de K correspondant à chaque élément df soient sensiblement égales entre elles. Je nommerai K_o la valeur de K appartenant à chacun des points de la base supérieure, et K_u celle qui appartient à chacun des points de la base inférieure.

Ceci posé, soit un conducteur circulaire de rayon R situé dans un plan normal à l'axe de l'aimant, et dont le centre est situé sur cet axe ou sur son prolongement. Le courant induit dû à l'aimantation subite du cylindre magnétique sera, d'après la formule (17) du § XII, égal à

$$J = -\varepsilon\varepsilon' \mathrm{S}.\varkappa \mathrm{K} df = -\varepsilon\varepsilon' \varkappa f(\mathrm{K}_o - \mathrm{K}_u). \tag{8}$$

Si les deux bases de l'aimant sont au-dessous du plan du conducteur, on aura

$$\mathrm{K}_o - \mathrm{K}_u = (\mathrm{K}_o) - (\mathrm{K}_u).$$

Si l'une est au-dessus, et l'autre au-dessous,

$$\mathrm{K}_o - \mathrm{K}_u = 4\pi - (\mathrm{K}_o) - (\mathrm{K}_u).$$

Enfin, si l'aimant est en entier au-dessus du plan,

$$\mathrm{K}_o - \mathrm{K}_u = -(\mathrm{K}_o) + (\mathrm{K}_u).$$

---

[*] Cela revient à supposer que l'aimant est formé par un faisceau de solénoïdes juxtaposés, ayant tous la longueur de l'aimant, pour base inférieure l'un des éléments df de la base u, et pour base supérieure l'élément correspondant dans la base o.

Ces trois valeurs se ramènent à une seule expression analytique ; car, h étant la longueur de l'aimant, et x la distance du centre du conducteur à la base supérieure de l'aimant, $h+x$ sera la distance à sa base inférieure, et l'on aura

$$K_o - K_u = 2\pi\left[\frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]; \tag{9}$$

d'où

$$J = -2\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[\frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]. \tag{10}$$

Le courant induit acquerra sa valeur maximum pour $x = -\frac{1}{2}h$, et l'on aura alors

$$J_{(m)} = -\frac{4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f}{\sqrt{1+\left(\frac{2R}{h}\right)^2}}. \tag{11}$$

Au contraire, si le pôle supérieur était dans le plan du conducteur, on aurait $x = 0$,

$$J = -\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{h}\right)^2}},$$

valeur presque moitié moindre que la précédente.

Supposons maintenant que l'aimant occupe l'axe d'une spirale de N tours, de rayon R, et dont la longueur suivant son axe soit égale à L. Considérons dans l'équation (10) x comme variant depuis $x = -a$ jusqu'à $x = -(a+L)$. On multipliera le second membre par $\frac{N\delta x}{L}$, nombre de tours contenu dans la tranche d'épaisseur δx, et l'on aura, en intégrant,

$$J = -2\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\int_{-a}^{-(a+L)}\frac{N}{L}\left[\frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]\delta x,$$

ou

$$J_s = -2\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\frac{N}{L}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{(L+a)^2+R^2} - \sqrt{(h-L-a)^2+R^2} \\ -\sqrt{a^2+R^2} + \sqrt{(h-a)^2+R^2}]\end{array}\right\}. \tag{12}$$

Les quantités $-a$, $-L-a$ sont les distances du pôle supérieur aux deux plans terminaux de la spire ; $-a+h$, $-L-a+h$ sont les mêmes distances pour le pôle inférieur. Si l'aimant est symétriquement placé, c'est-à-dire si $-a = -(-L-a+h)$, le courant prendra sa valeur maximum

$$\left\{\begin{array}{l} J'_s = -4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\frac{N}{L}\left[\sqrt{(h-a)^2+R^2} - \sqrt{a^2+R^2}\right] \\ \quad = -4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\frac{N}{L}\left[\sqrt{\left(\frac{h+L}{2}\right)^2+R^2} - \sqrt{\left(\frac{h-L}{2}\right)^2+R^2}\right].\end{array}\right. \tag{13}$$

Si le rayon R des spires est petit comparativement à la longueur h de l'aimant, la quantité entre parenthèses devient sensiblement égale à L, et l'on a à fort peu près [*]

$$(14) \qquad J_{,} = -4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\mathrm{N}.$$

En faisant dans l'équation (12) $a = 0$ et $\mathrm{L} = h$, on tombe sur le cas d'un aimant entièrement recouvert des spires du conducteur, et l'on trouve alors

$$(15) \qquad J_{,} = -4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\mathrm{N}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\right)^2} - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\right].$$

Si R est beaucoup plus petit que L, on retombe sur l'équation (14) : ainsi la force électromotrice ne dépend alors encore que du nombre des tours; mais il faut que les dimensions des bases f soient petites par rapport au rayon R. On peut comparer ces résultats avec les recherches faites sur ce sujet par Lenz, et publiées dans les *Annales de Poggendorff*, tomes XXXIV et XLVII.

Considérons toujours le même aimant que ci-dessus; mais supposons-le fixe et prenons un conducteur annulaire que nous transporterons de la position ω' à la position ω. On aura pour le courant induit, résultat de ce mouvement,

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa\mathrm{F}\left[\mathrm{K}_o - \mathrm{K}_u - (\mathrm{K}'_o - \mathrm{K}'_u)\right].$$

Dans cette équation, K_o et K_u sont les surfaces apparentes du circuit prises de la position ω pour chacun des deux pôles; K'_o, K'_u sont les surfaces apparentes relatives à la position ω'. Si la position ω' est à l'infini, on retombe sur le cas précédemment examiné; et si x et $x+h$ sont les distances du centre du conducteur aux bases o et u, le courant induit sera donné par l'équation (10), et sera un maximum pour $x = -\frac{1}{2}h$. Si l'on remplace en outre le conducteur annulaire par une spirale de N tours et de hauteur L, les distances du premier et du dernier tour à la base o étant $-a$ et $-(a+\mathrm{L})$ comme ci-dessus, on retombera sur l'équation (12) et sur les équations (13), (14), (15) qui en dérivent. Ainsi, dans ce cas encore, l'aimant venant de très-loin se loger dans l'axe de la spirale, le courant produit sera à fort peu près indépendant du rayon des tours, de la hauteur des spires et de la position finale de l'aimant, mais simplement proportionnel au nombre des tours; toutefois, cela n'est vrai que sous les mêmes restrictions déjà indiquées.

Désignons maintenant par ω'' le point milieu de l'axe de l'aimant, ω' un point pris sur le prolongement de cet axe, et faisons mouvoir le conducteur, son plan restant perpendiculaire à l'axe, de telle sorte que son centre aille alternativement de ω'' en ω' et de ω' en ω''. En nommant K''_o, K''_u les surfaces apparentes relatives à la

[*] M. Neumann déduit de là que, si le diamètre de la spirale est très-petit comparativement à son éloignement des bases de l'aimant, la force électromotrice engendrée est indépendante du diamètre de cette spirale. Si R est petit comparativement aux quatre distances $-a$, $-\mathrm{L}-a$, $-a+h$, $-\mathrm{L}-a+h$, l'expression (12) se réduit aussi à l'expression (14), et le courant ne dépend plus de la position des pôles par rapport à la spirale. A. B.

position ω'', le courant induit, dans le mouvement de ω'' en ω', sera

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[K'_o - K'_u - (K''_o - K''_u)\right];$$

et dans le retour, en employant le commutateur pour renverser le sens du courant, on aura la même valeur de J, ce qui donnera pour n allées et n retours,

$$(16) \qquad J_n = -2n\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[K'_o - K'_u - (K''_o - K''_u)\right].$$

Si au lieu d'employer le commutateur, c'est le conducteur qui, arrivé en ω', se renverse en tournant de 180 degrés autour d'un de ses diamètres, cette rotation fera naître en ce conducteur un courant induit analogue à celui de l'induction terrestre, et qui aura pour expression

$$2\varepsilon\varepsilon'\varkappa f(K'_o - K'_u);$$

de sorte qu'au bout de n répétitions de ce mouvement alternativement rotatoire et rectiligne, le courant total induit sera

$$J'_n = 2n\varepsilon\varepsilon'\varkappa f(K''_o - K''_u).$$

Cette suite de mouvements produit donc le même résultat que si le point ω' était situé à l'infini, et cette conséquence doit être étendue à tous les autres cas pareils, par exemple au cas déjà examiné d'une spirale de N tours. On peut consulter à ce sujet le Mémoire de M. Weber sur l'appareil inducteur de M. Gauss, dans les *Resultate* pour 1838.

III. Courbons maintenant notre aimant en fer à cheval; soit $2a$ la distance qui sépare le pôle o du pôle u, et soit nommé m le point qui occupe le milieu de cette longueur. En m est un axe de rotation perpendiculaire sur la ligne ou, et autour de cet axe tourne un conducteur circulaire entraîné par le mouvement d'une droite qui joint le point m au centre de ce conducteur : cette droite est à la fois perpendiculaire à l'axe de rotation et au plan du conducteur. Si x est la grandeur de cette droite, R le demi-diamètre du conducteur, il est évident que la rotation ne pourra s'effectuer que sous la condition $x^2 + R^2 < a^2$.

Soit φ l'angle de position du système rotatif, compté à partir de l'une des deux positions dans lesquelles le conducteur est perpendiculaire sur la ligne omu. L'induction produite par la rotation, depuis $\varphi = 0°$ jusqu'à $\varphi = \varphi$, sera

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[K_o - K_u - (K'_o - K'_u)\right].$$

Les valeurs K'_o, K'_u correspondent à $\varphi = 0°$, les valeurs K_o, K_u à $\varphi = \varphi$.

Le terme $K_o - K_u$, seul variable, atteint ses maxima et minima chaque fois que l'on a $\varphi = 180°$, $\varphi = 360°$, etc. : c'est dans ces positions que le courant momentané change de signe; c'est donc aux époques correspondant à ces positions que le commutateur doit agir pour renverser le sens du courant. D'après cela, cherchons la valeur de J, entre les limites $\varphi = 0°$, $\varphi = 180°$.

Le conducteur étant dans la position $\varphi = 0°$, considérons comme côté positif du plan du conducteur celui qui regarde vers la base o : on aura, conformément aux notations du § XII,

$$K'_o = +(K'_o).$$

Maintenant il est important de remarquer que l'axe courbe de l'aimant coupe le plan du conducteur en dehors de l'aire de ce conducteur, en un point pour lequel on a $K = 0$; ainsi, dans le passage du premier pôle o au deuxième pôle u, la valeur de K doit changer de signe, de sorte que l'on doit écrire

$$K'_u = -(K'_u).$$

Dans une rotation de 180 degrés, le mouvement relatif des pôles leur fait traverser le plan du conducteur en dehors de l'aire de ce dernier : ainsi on a, pour $\varphi = 180°$,

$$K_o = -(K_o), \quad K_u = (K_u);$$

d'ailleurs

$$K_u = (K'_o), \quad (K_o) = (K'_u).$$

On aura donc, pour la valeur de J,

$$J = \varepsilon\varepsilon' x f\left[2(K'_o) + 2(K'_u)\right],$$

et comme

$$(K'_o) = 2\pi\left[1 - \frac{a - x}{\sqrt{(a-x)^2 + R^2}}\right],$$

$$(K'_u) = 2\pi\left[1 - \frac{a + x}{\sqrt{(a+x)^2 + R^2}}\right],$$

il viendra

$$(17) \qquad J = 4\pi\varepsilon\varepsilon' x f\left[2 - \frac{a - x}{\sqrt{(a-x)^2 + R^2}} - \frac{a + x}{\sqrt{(a+x)^2 + R^2}}\right].$$

On deduirait de là facilement les formules relatives au cas d'un conducteur tourné en hélice, ainsi que la meilleure disposition à donner au système : on peut consulter à ce sujet le Mémoire de M. Weber sur la machine inductive par rotation.

IV. En conservant la disposition précédente, couchons le plan du conducteur, jusqu'à ce qu'il devienne perpendiculaire à l'axe de rotation, et fixons-le de manière que son centre soit éloigné de l'axe d'une longueur a égale à la demi-valeur de l'intervalle ou. Soit alors x la distance qui sépare les pôles o et u du plan du conducteur. Les maxima et minima de l'action momentanée du courant induit se produiront lorsque le centre du conducteur sera situé précisément en face des pôles o, ou u, par conséquent à une distance x de ces pôles. Faisons faire au conducteur une demi-révolution, depuis la position qui donne le minimum de distance à o, jusqu'à celle qui donne le minimum de distance à u ; nous aurons

$$(18) \qquad J = -\varepsilon\varepsilon' x f\left[K_o - K_u - (K'_o - K'_u)\right].$$

Mais on a d'ailleurs

$$K'_u = K_o = (K_o), \quad K'_o = K_u = (K_u),$$

attendu que les deux pôles sont situés du même côté par rapport au plan du conducteur.

On a ensuite

$$(K_u) = 2\pi\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right),$$

et approximativement,

$$(K_o) = \frac{R^2 \pi x}{(4a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

par conséquent

$$J = -4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{\frac{1}{2}R^2 x}{(4a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]. \tag{19}$$

V. Le dernier cas que je vais considérer se rapporte à un conducteur incomplet.

Reprenons notre aimant cylindrique et plaçons-le verticalement, la base o vers le haut, la base u vers le bas. L'axe prolongé de l'aimant porte deux disques métalliques dont les centres sont sur cet axe et dont les plans lui sont perpendiculaires. Ce système fait corps avec l'aimant et tourne avec lui autour de l'axe. Deux languettes métalliques fixes viennent presser sur les disques, et sont unis métalliquement avec les deux extrémités du fil d'un galvanomètre. Soient β, β' les deux points de contact des languettes avec les disques; ces points séparent le circuit en deux parties, dont l'une fait corps avec l'aimant et tourne avec lui, et dont l'autre reste fixe. On demande le courant induit dans un tel circuit par la rotation de l'aimant.

Pour traiter ce cas, il faut supposer que l'aimant reste fixe, et que le circuit incomplet qui unit le galvanomètre aux points β, β' tourne autour de l'axe de l'aimant. Or soient R le rayon du premier disque, x sa distance au pôle o positive si le disque est au-dessus du pôle et négative dans le cas contraire, $x + h$ la distance de ce disque au pôle u; soient R' le rayon du second disque, x' sa distance à o, et $x' + h$ sa distance à u. On remarquera que les courbes décrites par les extrémités du conducteur incomplet, pendant une rotation de 360 degrés, sont précisément les circonférences des deux disques. D'après ce qui a été dit dans le § XI, la force électromotrice développée est alors égale à la différence des valeurs du potentiel de l'aimant relativement à chacune de ces deux courbes, c'est-à-dire à la différence des quantités

$$\varepsilon\varkappa f(K_o - K_u) \quad \text{et} \quad \varepsilon\varkappa f(K'_o - K'_u);$$

K_o, K_u sont les surfaces apparentes du premier disque prises des pôles o et u; K'_o et

K'_u les surfaces apparentes du second disque prises des mêmes pôles. Or on a évidemment

$$K_o = 2\pi\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right), \qquad K'_o = 2\pi\left(1 - \frac{x'}{\sqrt{x'^2+R'^2}}\right),$$

$$K_u = 2\pi\left(1 - \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+R^2}}\right), \quad K'_u = 2\pi\left(1 - \frac{h+x'}{\sqrt{(h+x')^2+R'^2}}\right);$$

et la valeur de J devient

$$J = -\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left[K_o - K_u - (K'_o - K'_u)\right],$$

$$(20) \qquad J = 2\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - \dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+R'^2}} \\ -\dfrac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+R^2}} + \dfrac{h+x'}{\sqrt{(h+x')^2+R'^2}} \end{array}\right\}.$$

Si l'on suppose $R' = 0$, c'est-à-dire si le fil du galvanomètre vient presser le fond d'un cône creux dont le sommet est dans le prolongement de l'axe ou, l'expression précédente se simplifie, et l'on a

$$(21) \qquad J_o = 2\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+R^2}}\right).$$

C'est cette disposition qui a été adoptée par M. Weber, dans ses expériences sur l'induction unipolaire. La valeur maximum de J_o a lieu pour $x = -\frac{1}{2}h$. On a alors

$$J_o = -\frac{4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f}{\sqrt{1+\left(\frac{2R}{h}\right)^2}},$$

pour l'action totale du courant d'induction développé par une rotation complète de l'aimant autour de son axe.

M. Neumann résume ainsi les principales conséquences de son travail :

§ I. — Si l'on tient compte de la loi suivante de Lenz, que « dans le cas où l'induction est produite par un déplacement du conducteur induit en présence d'un courant inducteur ou d'un aimant, l'action électrodynamique exercée par l'inducteur sur l'induit tend toujours à retarder le mouvement de ce dernier; » et si l'on observe que

« l'induction instantanée est proportionnelle à la vitesse avec laquelle le mouvement s'effectue, » on arrive à la loi exprimée par la formule

$$EDs = -\varepsilon v CDs.$$

Dans cette formule, Ds est un élément du fil induit, et EDs la force électromotrice développée dans cet élément : v est la vitesse de Ds ; C est la composante suivant le mouvement de Ds, de la force électrodynamique que l'inducteur exerce sur l'élément Ds supposé parcouru par un courant d'intensité 1. La quantité ε peut être regardée comme constante, au moment même où l'induction s'exerce ; considérée comme fonction du temps, c'est une quantité qui décroît avec une rapidité extrême dans les instants qui suivent l'induction.

§ II. — Lorsque la force électromotrice EDs est développée dans l'élément Ds de l'arc s, non-seulement E est une fonction de s, mais aussi une fonction du temps ; toutefois, en supposant que les variations de E avec le temps soient incomparablement moins rapides que la propagation du courant électrique dans l'arc s, on pourra appliquer au courant induit la loi générale de Ohm, savoir que « l'intensité du courant induit est égale à la somme des forces électromotrices divisée par la résistance du circuit. »

§ III. — L'intensité du courant induit dans l'arc s sera donc

$$-\varepsilon\varepsilon' \mathrm{S}\, vCDs,$$

ε' étant le quotient de l'unité par la résistance de l'arc s, et le signe S indiquant que l'on doit intégrer l'expression $vCDs$ dans toute l'étendue de cet arc.

Le produit de cette expression par dt servira de mesure à l'*action momentanée du courant induit ;* et si l'on intègre par rapport au temps, entre deux époques données, on aura la mesure de l'*action totale du courant induit.*

La valeur de cette dernière action dépendra seulement du chemin parcouru par le conducteur, et nullement de la vitesse avec laquelle ce chemin aura été parcouru.

La force électromotrice du courant instantané est, au signe près, le moment virtuel [*] de la force électrodynamique exercée par l'inducteur sur l'induit, ce dernier étant supposé parcouru par un courant égal à ε.

La force électromotrice du courant total engendré par le déplacement du conducteur, depuis sa position initiale ω_0 jusqu'à sa position finale ω_1, est égale à la perte de force vive que l'inducteur fixe aurait occasionnée dans le mouvement du circuit induit parcouru par le courant ε, entre les limites ω_0 et ω_1.

La perte effective de force vive de ce circuit, supposé mû uniquement en vertu des

---

[*] Produit d'une force motrice par le chemin du mobile estimé suivant la direction de cette force.

vitesses acquises, sera, par suite de l'action électrodynamique exercée sur lui par l'inducteur, représentée par

$$2\varepsilon\varepsilon'\int_{t_0}^{t_1} dt(\mathrm{S}.v\mathrm{CD}s)^2.$$

Concevons que les trois composantes rectangulaires de l'action de l'inducteur sur l'élément Ds de l'induit supposé parcouru par le courant ε puissent s'exprimer par les dérivées partielles d'une fonction des coordonnées x, y, z de l'élément, et construisons les *surfaces de niveau* de cette fonction, c'est-à-dire celles dont tous les points ont des coordonnées donnant à la fonction une même valeur, que l'on pourra considérer comme une pression normale à la surface correspondante; la force électromotrice du courant total engendré dans l'élément induit par un déplacement de translation (sans rotation) de ϖ_0 à ϖ_1 sera égale à la différence des pressions qu'ont à supporter les deux surfaces de niveau correspondant aux positions initiale et finale, et cela quelles que soient les positions intermédiaires, pourvu que les positions initiale et finale restent les mêmes.

§ IV. — Si le conducteur A est en mouvement par rapport à B, on peut, par un mouvement commun des conducteurs, ramener A à l'immobilité; ce mouvement commun sera dit l'opposé du mouvement primitif de A.

La force électromotrice qui développe le courant induit reste la même, quel que soit celui des deux circuits dans lequel on fait circuler un courant d'intensité donnée, quel que soit celui des deux qui est en mouvement, pourvu que le mouvement relatif reste le même.

§ V. — Tout mouvement d'un circuit par rapport à un pôle de solénoïde ou d'aimant peut être considéré comme résultant de la superposition de deux mouvements distincts, l'un de translation commun à tous les points du circuit et au pôle supposé lié avec le circuit, l'autre de rotation qui s'effectue autour de ce pôle pendant que celui-ci est entraîné dans le mouvement commun.

Le courant instantané dû à la translation est égal à

$$-\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\Gamma d\varpi.$$

Il est sous-entendu que c'est le pôle qui se meut par rapport au conducteur immobile, et que $d\varpi$ est l'élément de la route parcourue dans le temps dt; $\varkappa'$ est la quantité de fluide magnétique libre accumulée en ce pôle; Γ est la composante suivant $d\varpi$ de l'action électrodynamique que le conducteur parcouru par un courant 1 exercerait sur l'unité de fluide accumulée au pôle.

Le courant instantané dû à la rotation est représenté par

$$-\varepsilon\varepsilon'\varkappa'[\cos(a, e'') - \cos(a, e')]\, d\psi;$$

dans cette formule $d\psi$ est la rotation infiniment petite autour du pôle; (a, e'') et (a, e') sont les angles que forme l'axe de rotation avec les droites menées du pôle aux deux

extrémités du conducteur. Ce courant ne dépend donc pas de la forme de ce dernier, mais seulement de la situation et du mouvement de ses deux extrémités ; ce courant est nul si le conducteur forme un circuit fermé.

Donc, si un conducteur fermé tourne autour d'un axe contenant un ou plusieurs pôles magnétiques, il ne se produira pas d'induction.

§ VI. — L'induction développée dans un conducteur en repos par le mouvement d'un solénoïde dépend seulement du mouvement des deux pôles de ce solénoïde.

L'effet d'un pôle se décompose en deux parties ; l'une dépend du mouvement de translation du pôle, l'autre de son mouvement de rotation ; les deux courants instantanés, qui correspondent à ces mouvements, sont

$$-\varepsilon\varepsilon'\varkappa'\Gamma d\varpi,$$

et

$$-\varepsilon\varepsilon'\varkappa'[\cos(a, e'') - \cos(a, e')]\, d\psi.$$

Si le circuit est fermé, l'induction de rotation est nulle.

Un pôle magnétique peut, sans changer de place, mais par sa rotation autour de lui-même, induire un courant dans un circuit non fermé. De cette loi découle la théorie de l'induction unipolaire.

§ VII. — Un aimant peut être considéré comme un assemblage d'un très-grand nombre de très-petits solénoïdes (ou atomes magnétiques). Ce système de solénoïdes peut, comme l'a démontré M. Gauss, être remplacé, quant à ses effets extérieurs, par un certain système de pôles répartis sur la surface de l'aimant ; ainsi l'induction engendrée par un aimant peut toujours être considérée comme provenant d'une certaine distribution de magnétisme libre à la surface de cet aimant.

L'induction ne dépend pas seulement de la translation de cette surface magnétique, mais elle dépend aussi de sa rotation : le courant engendré par cette rotation est uniquement déterminé par la position des deux extrémités du conducteur ; il devient nul si le circuit est fermé.

En nommant $\varkappa D\omega$ le magnétisme libre de l'élément de surface $D\omega$, le courant momentané provenant du mouvement de translation est égal à

$$-\varepsilon\varepsilon'\Sigma . \varkappa\Gamma D\omega d\varpi ;$$

dans cette formule, $d\varpi$ est l'arc très-petit décrit par $D\omega$; Γ est la composante de l'action électrodynamique exercée par l'unité de courant supposée en mouvement dans le conducteur induit, sur l'unité de fluide magnétique en $D\omega$, cette action étant estimée suivant la direction de l'arc $d\varpi$; l'intégration Σ doit s'étendre à la surface entière de l'aimant.

Le courant d'induction dû à la rotation est

$$-\varepsilon\varepsilon'\Sigma . \varkappa[\cos(a, e'') - \cos(a, e')]\, D\omega\, d\psi,$$

formule où (a, e'') et (a, e') sont les angles formés par l'axe de rotation avec les droites

menées du centre de Dω aux deux extrémités du conducteur, $d\psi$ étant toujours la valeur angulaire et très-petite de la rotation.

§ VIII. — L'aimantation et la désaimantation consistent, suivant les idées anciennes, en une séparation ou réunion des fluides magnétiques dans l'intérieur de chaque atome magnétique. Le courant induit résultant de ce déplacement des fluides est égal à

$$-\varepsilon\varepsilon'\Sigma.(\varkappa''-\varkappa')\,\mathrm{V}\mathrm{D}\omega\,;$$

$\varkappa'\mathrm{D}\omega$ et $\varkappa''\mathrm{D}\omega$ sont les quantités de fluide libre de l'élément de surface Dω, avant et après le changement de distribution du magnétisme intérieur; V est le potentiel du circuit induit considéré comme parcouru par un courant égal à 1, et agissant sur l'unité de fluide en Dω. L'intégration doit embrasser toute la surface de l'aimant.

§ IX. — Si l'on étend à tout l'aimant le potentiel du conducteur parcouru par le courant 1, et si l'on multiplie ce potentiel intégral par $\varepsilon\varepsilon'$, la différence des deux valeurs de cette quantité, au commencement et à la fin du mouvement de l'aimant, donnera le courant induit engendré par le déplacement de l'aimant: toutes les circonstances qui laissent intacte la valeur de ce potentiel sont impropres à produire aucune induction; mais si une cause quelconque modifie ce potentiel, l'induction se produit. Le changement de l'état magnétique d'un aimant immobile est une des causes qui peuvent produire cet effet.

§ X. — De même, lorsque deux circuits sont en mouvement, le courant induit résultant de ce mouvement s'obtiendra en multipliant par $-\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon' j$ la différence des valeurs initiale et finale du *potentiel intégral* de l'un des circuits parcouru par le courant 1, sur le deuxième circuit parcouru par le même courant : ici j est l'intensité du courant inducteur. Pour obtenir le potentiel indiqué, faisons passer par chaque circuit une surface d'ailleurs arbitraire, mais à laquelle le circuit servira de limite : soient Do et Dω deux éléments considérés, l'un sur une des deux surfaces, l'autre sur l'autre; r' et r'' la distance initiale et la distance finale des deux éléments; convenons de représenter par $\frac{d^2}{dn\,d\nu}\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}\right)$ la dérivée du second ordre de $\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}$, lorsqu'on passe du centre de Do à un point situé sur la normale à Do à une distance dn, et du centre de Dω à un point situé sur la normale à Dω à une distance $d\nu$.

L'expression du courant induit sera alors

$$-\varepsilon\varepsilon' j\mathrm{S}.\Sigma.\frac{d^2}{dn\,d\nu}\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'}\right)\mathrm{D}o\,\mathrm{D}\omega.$$

Les intégrales S et Σ s'étendent aux deux surfaces dont Do, Dω sont les éléments.

Dans ce cas encore, il n'y a d'induction produite que par l'effet des causes qui font changer la valeur de ce potentiel.

Supposons que le courant inducteur, sans se déplacer, change brusquement d'inten-

sité, et que celle-ci passe de la valeur j' à la valeur j''; le courant induit aura pour expression

$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon'(j''-j')\,\mathrm{S}.\Sigma.\frac{d^2\frac{1}{r}}{dn\,d\nu}\,\mathrm{D}\sigma\,\mathrm{D}\omega.$$

§ XI. — Le potentiel intégral d'un courant fermé s d'intensité j agissant sur un courant fermé σ d'intensité j' peut se mettre sous la forme

$$\tfrac{1}{2}jj'\,\mathrm{S}.\Sigma.\frac{\cos(\mathrm{D}s,\mathrm{D}\sigma)}{r}\,\mathrm{D}s\,\mathrm{D}\sigma,$$

r étant la distance des deux éléments $\mathrm{D}s$, $\mathrm{D}\sigma$, et $(\mathrm{D}s, \mathrm{D}\sigma)$ l'angle formé par $\mathrm{D}s$ avec $\mathrm{D}\sigma$. Les deux éléments $\mathrm{D}s$ et $\mathrm{D}\sigma$ s'attirent avec une force qui a pour valeur

$$\tfrac{1}{2}jj'\,\frac{\cos(\mathrm{D}s,\mathrm{D}\sigma)}{r^2}\,\mathrm{D}s\,\mathrm{D}\sigma.$$

La force électromotrice engendrée dans le circuit incomplet s, par son déplacement en présence du courant σ, est égale au potentiel de σ sur un courant d'intensité ε qui suivrait le contour de la surface décrite par l'arc total s dans son mouvement; ce contour est un quadrilatère curviligne ayant pour côtés, 1° et 3° les deux positions initiale et finale de l'arc s, 2° et 4° les deux arcs parcourus pendant le mouvement par chacune des extrémités de s.

Si le circuit s devient complet, on retrouve la loi énoncée au précédent paragraphe.

De même, si le circuit incomplet retourne à sa position initiale, ses extrémités décrivant chacune un circuit complet et fermé, la force électromotrice sera égale à la différence des valeurs du potentiel de σ sur chacune des deux courbes, supposées parcourues par un courant d'intensité ε.

Lorsqu'un conducteur fermé se meut suivant un chemin rentrant sur lui-même, en présence d'un circuit fermé, il n'y a pas d'induction produite.

Ces lois s'appliquent au cas où le courant est remplacé par un aimant.

On obtiendrait des résultats analogues dans le cas où le circuit inducteur serait mobile, et dans le cas où le circuit induit serait fermé, l'inducteur ne l'étant pas.

§ XII. — La *surface apparente* (*Kegelöffnung*) d'une courbe fermée prise d'un point donné est « la portion de surface sphérique de rayon 1 interceptée par le cône ayant le point donné pour sommet et la courbe donnée pour base. »

Un solénoïde pouvant, quant à ses actions extérieures, être remplacé par de certaines quantités de fluide $\varkappa'$ et $-\varkappa'$ accumulées à ses deux pôles, son potentiel aura, relativement à un circuit s parcouru par le courant 1, la valeur

$$\varkappa'(\mathrm{K}''-\mathrm{K}'),$$

K″ et K′ étant les surfaces apparentes de la courbe s, prises de chacun des deux pôles.

Le potentiel d'un aimant relativement à un courant fermé d'intensité 1 a pour valeur

$$S.\varkappa K D\omega,$$

expression dans laquelle $\varkappa D\omega$ est la quantité de magnétisme libre que l'on peut concevoir répandu sur l'élément $D\omega$ de la surface de l'aimant, et K la surface apparente du circuit prise du centre de cet élément.

Si l'aimant passe de la position ϖ' à la position ϖ'', le courant induit provenant de ce déplacement sera

$$-\varepsilon\varepsilon' S.\varkappa(K''-K')D\omega,$$

K′ et K″ étant les valeurs des surfaces apparentes du circuit prises du centre de $D\omega$ dans la première et dans la seconde position.

Dans le cas où le conducteur n'est pas fermé, la formule du courant induit sera

$$-\varepsilon\varepsilon' S.\varkappa K D\omega,$$

K étant la surface apparente du quadrilatère curviligne qui termine la surface décrite par le conducteur, l'origine du cône étant toujours au centre de $D\omega$.

Si la distribution magnétique change de telle sorte que le magnétisme répandu sur $D\omega$ devienne $\varkappa' D\omega$, au lieu de $\varkappa D\omega$, le courant induit engendré par ce changement dans un circuit fermé sera

$$-\varepsilon\varepsilon' S.(\varkappa''-\varkappa')KD\omega,$$

K étant toujours la surface apparente du circuit prise de $D\omega$.

Il existe certaines règles d'après lesquelles on devra déterminer le signe de K, et prendre pour K la plus grande ou la plus petite de ses deux valeurs possibles, valeurs dont la somme est toujours égale à 4π. (Renvoi au Mémoire pour la discussion de ces règles.)

§ XIII. — Application des formules du § XII à des cas particuliers.

1. Induction produite par le magnétisme terrestre dans un circuit plan qui tourne autour d'un axe. — Soit F l'aire plane du conducteur; soient c l'angle formé par la normale au plan du conducteur avec l'axe de rotation, et (a, r) l'angle de cet axe avec la ligne de l'inclinaison magnétique; convenons de compter l'angle de rotation φ de la normale, à partir du plan qui contient à la fois l'axe et la ligne d'inclinaison: le courant total d'induction produit par la rotation, depuis $\varphi=\varphi'$ jusqu'à $\varphi=\varphi''$, sera, M étant l'intensité magnétique terrestre,

$$-\varepsilon\varepsilon' MF \sin(a, r)\sin c(\cos\varphi''-\cos\varphi').$$

2. Dans les exemples suivants, on considère un aimant prismatique, dont le magnétisme libre est supposé uniformément réparti sur ses deux bases, avec une densité

égale à x: les dimensions de ces bases sont supposées petites par rapport aux distances qui les séparent des éléments du conducteur induit.

Induction produite par un aimant placé à l'intérieur d'une électrohélice. — On nomme f l'aire de l'une des bases de l'aimant, L la longueur de l'électrohélice, R son demi-diamètre, et N le nombre de ses tours; le courant induit par l'aimantation subite du barreau sera

$$-4\pi\varepsilon\varepsilon' x f \mathrm{N}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\right)^2}-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\right].$$

L'induction sera la même si un aimant, venant d'une grande distance, est subitement introduit dans l'hélice.

3. Induction produite par la rotation d'un conducteur circulaire en présence des pôles d'un aimant en fer à cheval. — Soient o et u les centres des deux bases de l'aimant, m le milieu de ou; l'axe de rotation passe par m et est perpendiculaire à ou; le centre du conducteur mobile est en C, dans le plan mené par ou normalement l'axe de rotation: on a

$$mo = mu = a, \quad m\mathrm{C} = x.$$

Le rayon R du conducteur est normal à mC; la rotation n'est possible qu'autant que l'on a

$$\sqrt{x^2+\mathrm{R}^2} < a^2.$$

Chaque demi-rotation du conducteur, qui ramène C à la coïncidence avec la ligne ou, détermine une induction exprimée par

$$4\pi\varepsilon\varepsilon' x f\left[2-\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+\mathrm{R}^2}}-\frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+\mathrm{R}^2}}\right].$$

4. Si le centre C est situé à une distance a de l'axe de rotation et à une distance x du plan mené par ou normalement à cet axe, si, de plus, le conducteur est parallèle à ce plan, les lettres a et R conservant leur signification, tout demi-tour, qui amène C du minimum de distance de l'un des pôles au minimum de distance relativement à l'autre pôle, produit un courant d'induction égal, à fort peu près, à

$$-4\pi\varepsilon\varepsilon' x f\left[1-\frac{x}{\sqrt{\mathrm{R}^2+x^2}}-\frac{\frac{1}{2}\mathrm{R}^2 x}{(4a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

5. Induction due à la rotation d'un aimant prismatique autour de son axe. — L'axe de rotation est la ligne ou de longueur h qui unit le centre de la base o au centre de la base u; sur le prolongement de l'axe, et liés avec lui, sont deux disques métalliques de rayons R et R', dont les plans sont perpendiculaires à cet axe; les distances des centres de ces disques à la base o sont x et x'; les distances à la base u sont $x+h$ et $x'+h$. Pendant que l'aimant et les deux disques tournent d'un mouvement commun, un circuit extérieur est mis en communication avec le système de ces disques au moyen

de languettes métalliques qui pressent sur leurs jantes, de sorte que le circuit est fermé par les roues et par la portion intermédiaire de l'axe. L'induction produite dans un tel circuit par une rotation complète de l'aimant sera

$$2\pi\varepsilon\varepsilon' f\varkappa\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}-\frac{h+x}{\sqrt{(h+x)^2+R^2}}-\frac{x'}{\sqrt{x'^2+R'^2}}+\frac{h+x'}{\sqrt{(h+x')^2+R'^2}}\right].$$

Supposons $R'=0$, c'est-à-dire que l'un des deux contacts ait lieu dans l'axe même, et que, de plus, on ait

$$x=-\tfrac{1}{2}h;$$

on aura alors la meilleure disposition pour obtenir l'induction unipolaire de M. Weber, et son expression sera

$$\frac{-4\pi\varepsilon\varepsilon'\varkappa f}{\sqrt{1+\left(\frac{2R}{h}\right)^2}}.$$

DÉMONSTRATION

De deux théorèmes généraux sur les périmètres de quelques courbes dérivées des hyperboles conjuguées;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Dans le numéro de janvier 1847 de ce Journal, j'ai étendu à l'ensemble d'une hyperbole quelconque et de sa conjuguée une propriété que M. Talbot avait constatée depuis longtemps pour l'hyperbole équilatère, et j'ai ajouté aussi quelques théorèmes analogues, relativement à une classe de courbes dérivées l'une de l'autre successivement, d'après une loi donnée, en partant d'une hyperbole. Les résultats que j'ai obtenus peuvent être compris, comme je l'ai remarqué, dans les énoncés de deux théorèmes généraux; mais la marche assez pénible que j'ai suivie ne me permettait de les vérifier que dans un petit nombre de cas particuliers. Or, en y réfléchissant, je suis parvenu à démontrer mes propositions d'une manière générale, en faisant usage des coordonnées elliptiques. La méthode étant la même dans les deux cas, je n'en considérerai qu'un seul. Voici le théorème que je me propose de démontrer :

Étant donnée une hyperbole ayant pour équation

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(*où l'on suppose* $c > b$), *traçons la courbe, lieu des projections orthogonales du centre sur ses tangentes; faisons dériver de cette seconde courbe une troisième en répétant la même construction, et ainsi de suite; et désignons par* S_n *la longueur du quadrant de la courbe qui*

occupe le $n^{\text{ième}}$ rang dans cette série. Considérons aussi le système des courbes dérivées de l'hyperbole conjuguée

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

d'après la même construction, et appelons Σ_n la longueur du quadrant de la $n^{\text{ième}}$ courbe dans cette nouvelle suite. Je dis qu'une combinaison quelconque des quadrants dont il s'agit, telle que

$$S_{2p}\,S_{2q+1} + \Sigma_{2p}\,\Sigma_{2q+1},$$

s'exprimera par des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce, de la manière suivante :

$$S_{2p}\,S_{2q+1} + \Sigma_{2p}\,\Sigma_{2q+1} = \pi\left[\alpha + \beta F(k, \lambda) + \gamma E(k, \lambda)\right],$$

où

$$k^2 = \frac{c^2}{b^2 + c^2}, \quad \cos\lambda = \frac{b^2}{c^2},$$

et où α, β, γ sont des fonctions algébriques de b et c.

En se reportant au tome X de ce Journal, page 185, on y trouvera, pour le quadrant S_n, les deux expressions suivantes (dans lesquelles on suppose $b^2 + c^2 = 1$) :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & b^n c^n \int_c^\infty \frac{nr^2 + (n-1)(r^2 + b^2 - c^2)}{r^{n-1}(r^2 + b^2 - c^2)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{dr}{\sqrt{(r^2 + b^2)(r^2 - c^2)}}, \\ & \int_{\frac{1}{c}}^\infty \frac{(n-1)b^2c^2\rho^2 + n(b^2c^2\rho^2 + c^2 - b^2)}{\rho^n(b^2c^2\rho^2 + c^2 - b^2)^{\frac{n}{2}}} \frac{d\rho}{\sqrt{(b^2\rho^2 + 1)(c^2\rho^2 - 1)}}. \end{aligned}\right.$$

Faisons dans la première de ces formules

$$n = 2q + 1 \quad \text{et} \quad r = \frac{bc}{\sqrt{\mu^2 - c^2}},$$

ce qui nous donnera

$$S_{2q+1} = bc\int_c^1 \frac{(2q+1)b^2c^2 + 2q\left[c^4 - (c^2 - b^2)\mu^2\right]}{\left[c^4 - (c^2 - b^2)\mu^2\right]^{q+1}} \frac{(\mu^2 - c^2)^{2q}\,d\mu}{\sqrt{(1 - \mu^2)(\mu^2 - c^2)}}.$$

Faisons aussi dans la seconde

$$n = 2p \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{c^2 - \nu^2}};$$

on aura cette autre expression,

$$S_{2p} = \int_0^c \frac{(2p-1)b^2c^2 + 2p[c^4 - (c^2 - b^2)\nu^2]}{[c^4 - (c^2 - b^2)\nu^2]^p} \frac{(c^2 - \nu^2)^{2p-1}\,d\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}.$$

D'ailleurs il est évident qu'on obtiendra la valeur de Σ_n en permutant b et c dans les expressions (1); on trouvera alors, en faisant dans la première

$$n = 2q + 1 \quad \text{et} \quad r = \frac{bc}{\sqrt{c^2 - \nu^2}},$$

et dans la seconde

$$n = 2p \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - c^2}},$$

$$\Sigma_{2q+1} = bc\int_0^c \frac{(2q+1)b^2c^2 + 2q[c^4 - (c^2 - b^2)\nu^2]}{[c^4 - (c^2 - b^2)\nu^2]^{q+1}} \frac{(c^2 - \nu^2)^{2q}\,d\nu}{\sqrt{(1-\nu^2)(c^2-\nu^2)}},$$

$$\Sigma_{2p} = \int_c^1 \frac{(2p-1)b^2c^2 + 2p[c^4 - (c^2 - b^2)\mu^2]}{[c^4 - (c^2 - b^2]\mu^2]^p} \frac{(\mu^2 - c^2)^{2p-1}\,d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(c^2-\mu^2)}}.$$

Supposons maintenant, pour fixer les idées, que $p < q$, et posons

$$M = (\mu^2 - c^2)^{2q-2p+1}\{(2p-1)b^2c^2 + 2p[c^4 - (c^2 - b^2)\nu^2]\}\{(2q+1)b^2c^2 + 2q[c^4 - (c^2 - b^2)\mu^2]\},$$
$$N = (c^2 - \nu^2)^{2q-2p+1}\{(2p-1)b^2c^2 + 2p[c^4 - (c^2 - b^2)\mu^2]\}\{(2q+1)b^2c^2 + 2q[c^4 - (c^2 - b^2)\nu^2]\},$$

et l'on verra aisément que

$$S_{2p}S_{2q+1} + \Sigma_{2p}\Sigma_{2q+1}$$

pourra s'écrire de la manière suivante :

$$bc\int_c^1\int_0^c \left\{\frac{M[c^4 - (c^2 - b^2)\nu^2]^{q-p+1} + N[c^4 - (c^2 - b^2)\mu^2]^{q-p+1}}{[c^4 - (c^2 - b^2)\mu^2]^{q+1}[c^4 - (c^2 - b^2)\nu]^{q+1}}\right\} \frac{(\mu^2 - c^2)^{2p-1}(c^2 - \nu^2)^{2p-1}\,d\mu d\nu}{\sqrt{(1-\mu^2)(\mu^2 - c^2)(1-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}.$$

Mais, si l'on considère le polynôme

$$\{M[c^4 - (c^2 - b^2)\nu^2]^{q-p+1} + N[c^4 - (c^2 - b^2)\mu^2]^{q-p+1}\}(\mu^2 - c^2)^{2p-1}(c^2 - \nu^2)^{2p-1},$$

on s'apercevra, en examinant sa formation avec un peu de soin, qu'il peut être résolu dans une suite de termes dont chacun sera de la forme $A\mu^{2m}\nu^{2m}(\mu^{2n}-\nu^{2n})$, A étant un coefficient fonction de b et c. Or ce terme se compose d'une suite d'autres dont le type général sera $(\mu^2-\nu^2)\mu^{2m}\nu^{2m}(\mu^{2n}+\nu^{2n})$ (abstraction faite du coefficient), et en exprimant $\mu^{2n}+\nu^{2n}$ au moyen de $\mu^2+\nu^2$ et de $\mu^2\nu^2$, ce dernier terme sera résolvable encore dans une suite d'expressions dont une quelconque aura la forme $(\mu^2-\nu^2)\mu^{2m}\nu^{2m}(\mu^2+\nu^2)^n$. Donc la fonction

$$S_{2p}S_{2q+1}+\Sigma_{2p}\Sigma_{2q+1}$$

sera exprimable par une série finie de termes, dont voici le type général :

$$(2)\qquad \int_c^1\int_0^c \frac{\mu^{2m}\nu^{2m}(\mu^2+\nu^2)^n}{[c^4-(c^2-b^2)\mu^2]^{q+1}[c^4-(c^2-b^2)\nu^2]^{q+1}}\,\frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu d\nu}{\sqrt{(1-\mu^2)(\mu^2-c^2)(1-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}.$$

Cela posé, considérons un ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{c^4}+\frac{y^2}{b^2c^2}+\frac{z^2}{b^4}=\frac{1}{c^2-b^2},$$

et soient, comme de coutume, μ et ν les coordonnées elliptiques d'un point quelconque appartenant à cette surface. On aura, en désignant par R le rayon vecteur central, par P la perpendiculaire abaissée du centre sur un plan tangent, et par $d\omega$ l'élément superficiel correspondant, et en prenant b^2+c^2 pour unité,

$$R^2=\mu^2+\nu^2+\frac{b^4+b^2c^2-c^4}{c^2-b^2},$$

$$P=\frac{b^3c^3}{\sqrt{c^2-b^2}}\,\frac{1}{\sqrt{[c^4-(c^2-b^2)\mu^2][c^4-(c^2-b^2)\nu^2]}},$$

$$d\omega=\frac{d\mu d\nu}{c^2-b^2}\,\frac{(\mu^2-\nu^2)\sqrt{[c^4-(c^2-b^2)\mu^2][c^4-(c^2-b^2)\nu^2]}}{\sqrt{(1-\mu^2)(\mu^2-c^2)(1-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}$$

(*voir* la Lettre de M. Liouville à M. Blanchet, tome XI, pages 218-220); d'où il suit que le calcul du terme (2) dépendra de l'évaluation de l'intégrale double définie $\left(\text{à cause de } x=\frac{c\mu\nu}{\sqrt{c^2-b^2}}\right)$,

$$(3)\qquad \iint R^{2n}P^{2q+3}x^{2m}\,d\omega,$$

que l'on doit étendre à la huitième partie de l'ellipsoïde entier.

Mais en faisant

$$x = \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad y = \frac{bc \sin\theta \cos\varphi}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{b^2 \sin\theta \sin\varphi}{\sqrt{c^2 - b^2}},$$

on aura, en vertu de formules bien connues,

$$R^2 = \frac{c^4 \cos^2\theta + b^2 c^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + b^4 \sin^2\theta \sin^2\varphi}{c^2 - b^2},$$

$$\frac{1}{P^2} = \frac{c^2 - b^2}{b^4 c^4} (b^4 \cos^2\theta + b^2 c^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + c^4 \sin^2\theta \sin^2\varphi),$$

$$d\omega = \frac{bc}{\sqrt{c^2 - b^2}} \sqrt{b^4 \cos^2\theta + b^2 c^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + c^4 \sin^2\theta \sin^2\varphi} \sin\theta \, d\theta d\varphi;$$

en sorte que la détermination de l'intégrale (3) se trouvera réduite, en dernière analyse, à celle de l'intégrale définie,

$$(4) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^{2m+1}\theta \cos^{2n}\varphi \, d\theta d\varphi}{(b^4 \cos^2\theta + b^2 c^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + c^4 \sin^2\theta \sin^2\varphi)^{q+1}}.$$

La première intégration, par rapport à φ, peut s'effectuer avec facilité, ce qui nous donnera π pour coefficient; et l'autre, par rapport à θ, introduira des fonctions elliptiques de première et de seconde espèce, ayant toujours même module et même amplitude, quels que soient m, n, q: en sorte qu'on trouvera, pour la valeur de (4), une expression qui peut s'écrire ainsi,

$$(5) \qquad \pi[\alpha + \beta F(k, \lambda) + \gamma E(k, \lambda)],$$

α, β, γ étant des fonctions algébriques de b et c. Afin de déterminer k et λ en fonction de ces quantités, nous supposerons

$$m = n = q = 0,$$

ce qui nous donnera, comme on sait (*Legendre,* tome I, page 284):

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta d\varphi}{b^4 \cos^2\theta + b^2 c^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + c^4 \sin^2\theta \sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2bc\sqrt{c^4 - b^4}} F(k, \lambda),$$

où

$$k^2 = \frac{c^2}{b^2 + c^2} \quad \text{et} \quad \cos\lambda = \frac{b^2}{c^2}.$$

Il est évident donc que

$$S_{2p} S_{2q+1} + \Sigma_{2p} \Sigma_{2q+1}$$

est composé d'une suite finie de termes ayant pour type l'expression (5), et, par conséquent, que cette fonction elle-même pourra se présenter sous une forme pareille.

On doit observer que nous avons supposé $p < q$ dans la démonstration précédente; mais des changements très-légers suffiront pour établir la proposition dont il s'agit dans le cas opposé.

Il existe une autre combinaison des périmètres de nos courbes, qui conduit à un résultat tout à fait semblable à celui qu'on vient d'obtenir, savoir,

$$S_p \Sigma_{p+2q} - \Sigma_p S_{p+2q}.$$

Cette fonction conserve aussi le type (5), comme on pourra s'en assurer sans difficulté en suivant la marche indiquée ci-dessus.

MÉMOIRE

SUR LA THÉORIE DES PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES;

PAR M. J. BERTRAND.

La théorie proposée par Laplace pour l'explication des phénomènes capillaires a été vivement critiquée par Poisson; les objections de ce célèbre géomètre l'ont conduit à proposer une hypothèse qui n'a pas été généralement adoptée, et qui d'ailleurs laisserait peut-être subsister encore bien des difficultés. On doit reconnaître cependant que ces objections ont quelque chose de fondé et qu'il y a une contradiction évidente dans la manière dont Laplace envisage la question. L'hypothèse d'un fluide incompressible dont les molécules disjointes agissent les unes sur les autres suivant une fonction de la distance est en effet, mathématiquement parlant, impossible. Mais il suffit que cette hypothèse, sans être rigoureusement exacte, se rapproche assez de la réalité pour que ses conséquences soient d'accord avec l'expérience. J'ajouterai, et il semble que cette observation si simple ait échappé à Poisson, que Laplace, malgré son hypothèse inexacte, sur l'incompressibilité des fluides, s'est proposé une question qui, au point de vue mathématique, n'a rien d'absurde. L'introduction de la force, qu'il appelle la pression et dont la valeur se détermine précisément de manière à ce qu'il n'y ait pas changement de volume, permet, en effet, de regarder le fluide comme incompressible. Il est bien vrai que, dans le fluide physique et compressible, cette pression ne peut être distinguée de la résultante des actions moléculaires et doit se calculer, comme Poisson l'a si souvent remarqué, au moyen de la fonction qui les représente. Mais, au point de vue abstrait auquel les géomètres se placent, cette fonction forme une force à part, de la nature de celles qu'on introduit si souvent en mécanique sous le nom de *forces de liaison,* et qui, dans chaque

cas, peuvent donner lieu à des objections analogues, si l'on conteste le droit d'introduire dans l'énoncé d'une question les notions des corps rigides, des axes fixes, etc.; si, en un mot, on se refuse à remplacer une question de physique par une question abstraite analogue, mais non identique.

Le principe des vitesses virtuelles, appliqué à un système défini d'une manière quelconque, permet d'éviter cette difficulté apparente qui provient des forces de liaison, laquelle, dans la théorie des phénomènes capillaires, acquiert une nouvelle force par l'introduction des forces moléculaires qui les produisent en réalité et qu'on regarde cependant comme en étant complétement indépendantes. C'est sans doute pour cette raison que, dans son beau Mémoire sur les phénomènes capillaires, M. Gauss s'est attaché à prendre pour base unique de ses raisonnements le principe des vitesses virtuelles; mais, comme il le dit lui-même, cet illustre géomètre avait en même temps pour but de donner un exemple de l'application du calcul des variations à une question relative aux intégrales multiples: il a donc dû, pour exposer cette théorie d'une manière générale, rejeter les nombreuses simplifications géométriques qui auraient pu se présenter à lui. Le but que je me suis proposé dans ce Mémoire est précisément de faire connaître la méthode de M. Gauss et les simplifications dont elle est susceptible et qui la rendent, si je ne me fais pas illusion, la plus facile de celles qui ont été proposées jusqu'ici.

Après avoir donné une démonstration nouvelle des résultats obtenus par M. Gauss, je me suis efforcé d'appliquer sa méthode à des questions assez simples pour qu'on pût comparer l'expérience aux résultats fournis par l'analyse. Les théorèmes suivants, qui, si la théorie est exacte, sont *rigoureusement* vrais, me paraissent remplir cette condition :

1°. Si un tube capillaire est plongé dans un liquide et que la colonne du liquide soulevé soit séparée en plusieurs parties par des bulles d'air introduites artificiellement, la masse totale du liquide soulevé ne dépendra ni du nombre, ni du volume de ces bulles.

2°. Quand une colonne de liquide est suspendue dans un tube capillaire ouvert par les deux bouts et placé verticalement dans l'air libre, le volume total de cette colonne est *tout au plus* égal au produit

du volume qui serait soulevé par le tube s'il était plongé dans un vase plein du même liquide par la somme $\left(1+\frac{1}{\cos i}\right)$, i étant l'angle sous lequel la surface capillaire formée par ce liquide coupe les parois du vase.

3°. Si plusieurs liquides sont superposés dans un même tube capillaire et que ce tube plonge dans un vase de même nature que le liquide inférieur, la somme des poids des liquides soulevés ne dépend que de la nature du tube et de celle du liquide inférieur.

4°. En nommant V le volume d'une goutte de mercure, b la surface de la base de cette goutte, L le contour de cette base, et enfin h la hauteur à laquelle le liquide s'élèverait dans un vase très-large communiquant avec la goutte par un tube plein de mercure, on aura la relation

$$V = bh + \alpha^2 L \sin i,$$

α étant une constante, et i l'angle défini plus haut.

I.

En considérant un liquide comme composé de molécules matérielles $m, m', m'', \ldots$ qui agissent les unes sur les autres suivant une fonction de leur distance mutuelle et proportionnellement au produit de leurs masses, supposant ce liquide renfermé dans un tube fixe dont les différentes molécules ayant pour masse M, M′, M″,... attirent $m, m', m'', \ldots$ suivant une autre fonction de la distance; si l'on adopte la notation (m, m') pour représenter les distances des points m et m', et qu'on représente par $mm'f(\overline{m, m'})$, $mMf(\overline{m, M})$ les forces qui s'exercent entre m, m', m, M, le principe des vitesses virtuelles nous apprend que, pour tous les déplacements qui laissent invariable le volume total, on doit avoir

$$(1)\quad 0=\sum m\left\{\begin{array}{l}-g dz - m'f(m, m')\,d(m, m') - m''f(m, m'')\,d(m, m'')\ldots\\ \qquad - \mathrm{M}F(m, \mathrm{M})\,d(m, \mathrm{M}) - \mathrm{M}'F(m, \mathrm{M}')\,d(m, \mathrm{M}')\ldots\end{array}\right\},$$

les variations $d(m, m')$, $d(m, \mathrm{M})$ se rapportant au déplacement virtuel du point m.

Introduisons au lieu des fonctions f et F leurs intégrales φ et Φ, ou,

en d'autres termes, posons

$$\int_r^\infty f(r)\,dr = -\varphi(r), \qquad \int_r^\infty \mathrm{F}(r)\,dr = -\Phi(r),$$

l'équation (1) deviendra

$$\sum m \left\{ \begin{array}{l} -gdz + m'd\varphi(m, m') + m''d\varphi(m, m'') + \ldots \\ \qquad + \mathrm{M}d\varphi(m, \mathrm{M}) + \mathrm{M}'d\varphi(m, \mathrm{M}') + \ldots \end{array} \right\},$$

les différentiations se rapportant encore au seul déplacement du point m. Mais il est évident que chacune de ces différentielles partielles pourra être réunie à une autre différentielle qui la complétera et formera avec elle la variation totale de la fonction. Ainsi, par exemple, en faisant la somme relative au point m, nous aurons le terme

$$mm'd\varphi(m, m'),$$

et, dans la somme relative à m',

$$m'md\varphi(m, m'),$$

la première variation se rapportant au déplacement de m, et la seconde à celui de m'; la somme de ces deux termes pourra s'écrire

$$mm'd\varphi(m, m'),$$

le signe d exprimant cette fois la variation totale de la fonction φ.

D'après cela, la somme des moments virtuels des forces qui sollicitent le système peut être considérée comme la variation totale de l'expression

$$\Omega = \sum m \left\{ \begin{array}{l} -gz + \frac{1}{2}m'\varphi(m, m') + \frac{1}{2}m''\varphi(m, m'') + \ldots \\ \qquad + \mathrm{M}\Phi(m, \mathrm{M}) + \mathrm{M}'\Phi(m, \mathrm{M}') + \ldots \end{array} \right\};$$

les termes $\varphi(m, m')\,m'm$ sont divisés par 2, parce que chacun d'eux se reproduira évidemment deux fois dans la sommation.

Si nous supposons maintenant que les molécules $m, m', \ldots, \mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{M}'', \ldots$ forment deux masses continues, l'expression précédente deviendra, en appelant v le volume occupé par le liquide et ρ sa densité, v' et ρ' le volume et la densité de la matière solide qui forme le tube,

$$\Omega = -g\rho\int zdv + \frac{1}{2}\rho^2\int\int dv\,dv_1\,\varphi(dv\,dv_1) + \rho\rho'\int\int dv\,dv'\,\Phi(dv\,dv');$$

dv et dv_1 désignent ici deux éléments quelconques du volume liquide,

en sorte que le second terme de la valeur de Ω représente, en réalité, une intégrale sextuple; il en est de même du troisième.

II.

Les deux intégrales sextuples qui entrent dans les valeurs de Ω peuvent être considérées comme provenant l'une et l'autre de la solution du problème suivant :

Deux espaces limités étant donnés, faire la somme des produits obtenus en multipliant un élément quelconque du premier par un élément quelconque du second et par une fonction de la distance de ces deux éléments.

La première de nos deux intégrales se rapporte au cas où les deux espaces sont identiques, et dans la seconde, l'un d'eux étant le volume occupé par le liquide et l'autre le volume occupé par le vase, ces deux espaces sont entièrement distincts; nous considérerons d'une manière générale la réduction de l'intégrale sextuple qui exprime la solution du problème en supposant que les deux volumes dont on s'occupe soient tout à fait quelconques, tant pour la forme que pour la position relative.

En nommant dv, dv' les éléments de nos deux volumes, il s'agit de transformer l'intégrale sextuple

$$\int\int dv\,dv'\,\varphi\,(dv,\,dv').$$

Nous allons voir qu'on peut, dans tous les cas, la ramener à une intégrale quadruple.

Soit μ un élément du volume v' (qui pourra faire ou ne pas faire partie du volume v), et considérons d'abord l'intégrale triple

$$\int dv\,\varphi\,(\mu,\,dv),$$

que nous étendrons à tout le volume v. Concevons une sphère de rayon 1 décrite du point μ comme centre et divisée en éléments infiniment petits; soit $d\Pi$ l'un de ces éléments; considérons $d\Pi$ comme la base d'un cône ayant pour sommet l'un des points de $d\mu$, et soient p', p'', p''',... les points où ce cône coupe la surface s qui limite le volume v, le nombre de ces points étant évidemment impair

ou pair, suivant que μ fait ou ne fait pas partie de v; désignons par dt', dt'', dt''' les éléments interceptés par ce cône sur la surface s, et q', q'', q''',... les angles formés par les génératrices avec les normales extérieures à ces éléments, et enfin par v', v'', v''',... les distances $\mu p'$, $\mu p''$, $\mu p'''$,...; nous aurons évidemment

$$d\Pi = \pm \frac{dt' \cos q'}{v'^2} = \mp \frac{dt'' \cos q''}{v''^2} = \pm \frac{dt''' \cos q'''}{v'''^2}, \ldots,$$

les signes supérieurs se rapportant au cas où le point μ est extérieur à v et les signes inférieurs au cas contraire.

Si maintenant nous formons les portions de l'intégrale triple qui est relative aux éléments de v situés dans l'intérieur du cône considéré, cette portion est évidemment représentée :

1°. Si le point μ est extérieur à v, par

$$d\Pi \left[\int_{r'}^{r''} \varphi(r)\, r^2\, dr + \int_{r'''}^{r^{\text{iv}}} \varphi(r)\, r^2\, dr + \ldots \right];$$

2°. Si μ fait partie du volume v, par

$$d\Pi \left[\int_{0}^{r'} \varphi(r)\, r^2\, dr + \int_{r''}^{r'''} \varphi(r)\, r^2\, dr + \ldots \right];$$

en sorte que, si nous posons

$$\int_{r}^{\infty} \varphi(r)\, r^2\, dr = -\psi(r),$$

cette intégrale deviendra, dans le premier cas,

$$d\Pi\,[\psi(r') - \psi(r'') + \psi(r''')\ldots] = \frac{dt' \cos q'\, \psi(r)}{r'^2} + \frac{dt'' \cos q''\, dt''}{v''^2} + \ldots,$$

et, dans le second,

$$d\Pi\, \psi(0) + \frac{dt' \cos q'}{v'^2}\, \psi(r') + \frac{dt'' \cos q''}{r''^2}\, dt'' + \ldots;$$

et si maintenant nous faisons la somme de ces résultats pour toutes les positions possibles de l'élément $d\Pi$, il vient, dans le premier cas,

$$\int \frac{dt \cos q}{v^2}\, \psi(r),$$

et, dans le second,

$$4\Pi\psi(0) + \int \frac{dt \cos q}{v^2}\, \psi(r),$$

les deux intégrales devant s'étendre à toute la surface qui limite le volume v.

On déduit facilement des résultats précédents, qu'en désignant par σ le volume qui appartient à la fois à v et v', l'intégrale sextuple que nous voulions évaluer est égale à

$$4\Pi\sigma\psi(0) + \int\int \frac{dt\, dv \cos q\, \psi(dt, dv)}{(dt, dv)^2},$$

de sorte que pour la calculer, il suffira de former une intégrale quintuple dans laquelle on considérera successivement les éléments du volume v, combinés avec ceux de la surface t.

Pour réduire cette intégrale quintuple, considérons un élément fixe dt de la surface t, et formons d'abord l'intégrale triple qui se rapporte à la combinaison de cet élément avec tous ceux du volume dv; cette intégrale sera

$$\int \frac{dv \cos q\, \psi(dt, dv)}{(dt, dv)^2}$$

q désignant l'angle de la droite (dv, dt) avec la normale extérieure à dt.

Concevons une sphère de rayon 1 décrite de dt comme centre; soit encore $d\Pi$ un élément de la surface de cette sphère; considérons le cône qui, ayant pour sommet un point de dt, aurait $d\Pi$ pour base; supposons que ce cône coupe la surface T qui limite le volume v aux points P', P'', P''',...; soient R', R'', R''',... les distances de ces différents points au point μ; dT', dT'', dT''' les portions de la surface T interceptées par ce cône infiniment petit, et enfin Q', Q'', Q''' les angles formés par le cône avec la normale extérieure à ces éléments: nous aurons

$$d\Pi = \pm \frac{dT' \cos Q'}{R'^2} = \mp \frac{dT'' \cos Q''}{R''^2} = \pm \frac{dT''' \cos Q'''}{R'''^2},$$

les signes supérieurs ou inférieurs devant être adoptés suivant que dt est extérieur ou intérieur au volume v. Si maintenant nous intégrons dans toute l'étendue du cône infiniment petit, considéré plus haut, q, dans toute l'étendue de cette intégration, devra être considéré comme

constant, et si nous posons

$$\int_r^\infty \psi(r)\,dr = -\,\theta(r),$$

nous verrons, comme dans le cas précédent, que l'intégrale

$$\int \frac{dv \cos q\, \psi(v, dt)}{(dv, dt)^2},$$

étendue à tous les éléments du cône infiniment petit, sera égale, dans le premier cas, à

$$\cos q \left[\frac{d\mathrm{T}' \cos \mathrm{Q}'}{\mathrm{R}'^2}\,\theta(\mathrm{R}') + \frac{d\mathrm{T}'' \cos \mathrm{Q}''}{\mathrm{R}''^2}\,\theta(\mathrm{R}'') + \ldots\right],$$

et, dans le second, à

$$d\Pi \cos q\, \theta(\mathrm{o}) + \cos q \left(\frac{d\mathrm{T}' \cos \mathrm{Q}'}{\mathrm{R}'^2}\,\theta(\mathrm{R}') + \ldots\right).$$

Si maintenant nous intégrons par rapport à $d\Pi$, il viendra :

1°. Dans le cas où l'élément dt est extérieur à v,

$$\int \frac{dv \cos q\, \psi(dt, dv)}{(dv, dv)^2} = \int \frac{d\mathrm{T} \cos q \cos \mathrm{Q}\, \theta(\mathrm{R})}{\mathrm{R}^2},$$

$d\mathrm{T}$ désignant l'un quelconque des éléments de la surface qui termine v.

2°. Dans le cas où dt est situé dans l'intérieur de v, il faut ajouter à l'expression précédente le terme

$$\theta(\mathrm{o}) \int d\Pi \cos q.$$

Il est facile de voir que, si cette intégrale est étendue à tous les éléments de la sphère de rayon 1, les parties qui la composent se détruisent deux à deux et sa valeur totale est o; mais si l'élément dt fait partie de la surface qui limite v, c'est-à-dire si les espaces v et v' sont, en partie, limités par une surface commune, et que dt désigne l'élément de cette surface, l'intégrale

$$\theta(\mathrm{o}) \int d\Pi \cos q$$

devra être étendue seulement aux éléments de la surface sphérique

pour lesquels la droite $(dt, d\Pi)$ se trouve, dans le voisinage de dt, intérieure au volume v, c'est-à-dire pour tous les éléments qui se trouvent d'un même côté du plan tangent à dt et pour lesquels l'angle q est aigu, si les volumes v et v' sont situés de côtés différents de la surface qui leur est commune, et obtus dans le cas contraire. On trouvera très-facilement que, dans le premier cas, l'intégrale

$$\int d\Pi \cos q = +\Pi,$$

et, dans le second,

$$\int d\Pi \cos q = -\Pi.$$

Il résulte des considérations précédentes que l'intégrale sextuple

$$\iint dv dv' \varphi(dv, dv')$$

peut se ramener à la forme suivante :

1°. Si les volumes v et v' ont une partie commune σ, leurs surfaces étant entièrement distinctes,

$$\iint dv dv' \varphi(dv, dv') = 4\Pi\sigma\psi(o) + \iint \frac{dt\, d\mathrm{T} \cos q \cos \mathrm{Q}}{(dt, d\mathrm{T})^2}\theta(dt, d\mathrm{T});$$

2°. Si les surfacee t, T, qui limitent v et v', ont une partie commune que nous appellerons S,

$$\iint dv dv' \varphi(dv, dv') = 4\Pi\sigma\psi(o) \mp \Pi\rho \mathrm{S}\theta(o)$$
$$+ \iint \frac{dt\, d\mathrm{T} \cos q \cos \mathrm{Q}\, \theta(dt, d\mathrm{T})}{(dt, d\mathrm{T})^2},$$

le signe supérieur se rapportant au cas où v et v' sont du même côté de leur surface de séparation, et le signe inférieur au cas contraire.

III.

D'après la formule de réduction à laquelle nous sommes parvenus, la quantité Ω, dont la variation représente la somme des moments virtuels des forces qui sollicitent le système, peut être mise sous la

forme suivante :

$$\Omega = -g\rho\int z\,dv + \frac{1}{2}\rho^2 v\psi(0) - \frac{1}{2}\Pi\rho^2 t\theta(0) + \Pi\rho\rho' \mathrm{T}\Theta(0)$$
$$+\int\int\frac{dt\,dt'\cos q\cos q'\,\theta(r)}{v^2} + \int\int\frac{dt\,d\mathrm{T}\cos q\cos \mathrm{Q}\,\theta(v)}{v},$$

ρ désignant, comme nous l'avons dit plus haut, la densité de liquide, et ρ' celle du verre; v étant le volume du liquide, t l'aire de la surface qui termine ce volume et T l'aire de la portion de cette surface qui est en contact avec les parois du tube ou avec celles du vase. Les fonctions ψ, θ et Θ se déduiront des fonctions φ et Φ par les équations suivantes :

$$\int_r^\infty r^2\varphi(r)\,dr = -\psi(r),\quad \int_r^\infty \psi(r)\,dr = -\theta(r),$$
$$\int_r^\infty r^2\Phi(r)\,dr = -\Psi(r),\quad \int_r^\infty \Psi(r)\,dr = -\Theta(r).$$

Les fonctions φ et Φ étant totalement inconnues, il en sera de même de θ et Θ qui s'en déduisent. On peut néanmoins admettre que ces deux fonctions, de même que φ et ψ, s'annulent pour toutes les valeurs sensibles de la variable; il suffit, pour cela, de remarquer que l'action des molécules situées à une distance sensible n'ayant aucune influence sur les phénomènes, on ne changera rien à ceux-ci, en admettant que φ et Φ soient rigoureusement nulles pour des valeurs finies de la variable, ce qui entraîne évidemment la même condition pour les fonctions θ et Θ.

D'après cette remarque, on voit sans peine que les deux intégrales quadruples qui entrent dans la valeur de Ω sont l'une et l'autre négligeables.

Considérons, en effet, la première de ces deux intégrales,

$$\int\int\frac{dt\,dt'\cos q\cos q'}{v^2}\,\theta(r).$$

Nous pouvons l'écrire de la manière suivante :

$$\int dt\int\frac{dt'\cos q\cos q'}{v^2}\,\theta(r).$$

Mais, en nommant $d\Pi$ l'élément de surface sphérique de rayon 1 décrite de dt comme centre, on peut poser

$$\frac{dt' \cos q}{v^2} = d\Pi,$$

ce qui ramène l'intégrale considérée à

$$\int dt \int d\Pi \cos q \,.\, \theta(r).$$

Or, sous cette forme, il est évident que

$$\int d\Pi \cos q \,.\, \theta(r)$$

a une valeur négligeable; car si r n'est pas très-petit, $\theta(r)$ est négligeable, et si r est très-petit, la ligne (dt, dt') est très-voisine du plan tangent, et $\cos q$ diffère très-peu de zéro. Un raisonnement tout semblable montrerait qu'on peut négliger la seconde intégrale quadruple, et prendre, par conséquent, pour Ω l'expression suivante :

$$\Omega = -g\rho \int z dv + \frac{1}{2}\rho^2 v \psi(0) - \frac{1}{2}\Pi \rho^2 t\theta(0) + \Pi \rho\rho' \mathrm{T}\Theta(0).$$

Cette somme, pour l'équilibre, doit être un minimum. Or il est évident qu'on peut supprimer le terme $\frac{1}{2}\rho^2 v\psi(0)$ qui est constant; si, en outre, on divise par $g\rho$, et qu'on change le signe de Ω après avoir posé

$$\frac{\Pi\rho\theta(0)}{2g} = \alpha^2,$$

$$\frac{\Pi\rho'\Theta(0)}{2g} = \beta^2,$$

on aura

$$\mathrm{K} = \int z dv + \alpha^2 t - 2\beta^2 \mathrm{T},$$

et cette fonction K doit être un minimum.

Si l'on désigne par U la surface libre du liquide, on aura

$$t = \mathrm{U} + \mathrm{T},$$

en sorte que l'expression qu'il faut rendre minimum prendra la forme

$$\int z dv + (\alpha^2 - 2\beta^2)T + \alpha^2 U = K,$$

U étant la surface libre du liquide et T la portion de cette surface en contact avec les parois du tube ou avec celles du vase.

IV.

Le résultat précédent a été obtenu par M. Gauss, et tout ce qui précède est extrait de son Mémoire. Mais, au lieu de résoudre, comme lui, par le calcul des variations la question de minimum à laquelle nous sommes conduits, nous allons déduire de considérations géométriques très-simples l'équation différentielle de la surface U qui peut rendre K minimum, ainsi que les conditions qui doivent être remplies aux limites.

Pour que K soit un minimum, le volume v restant constant, il faut que la variation de la somme $K + \lambda v$ soit nulle, λ désignant une constance que l'on détermine ultérieurement.

Supposons d'abord que l'on fasse subir à la surface libre U une variation infiniment petite en conservant le même contour, c'est-à-dire en laissant invariable la portion de la surface du tube mouillée par le liquide qui a été désigné par T_1.

J'ai fait voir dans mon Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales que si, sur la surface U, on considère un rectangle infiniment petit $d\omega$ formé par quatre lignes de courbure, les normales menées par les différents points du contour de cet élément intercepteront sur la surface voisine un élément infiniment petit correspondant égal à

$$d\omega\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\varepsilon + d\omega,$$

ε étant la distance infiniment petite des deux surfaces que l'on compare.

D'après ce théorème, dont la démonstration géométrique est fort simple, la variation de $\alpha^2 U$ est égale à

$$\alpha^2 \int d\omega \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\varepsilon;$$

quant à $\int z\,dv$, il est évident que sa variation est

$$\int z\varepsilon d\omega,$$

et, enfin, la variation de v est égale à

$$\int \varepsilon d\omega.$$

On doit donc avoir

$$\int \varepsilon d\omega \left[\alpha^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)+z+\lambda\right]=0,$$

et, comme ce résultat doit avoir lieu quel que soit ε, on en conclut

$$\alpha^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)+z+\lambda=0,$$

ce qui est, en effet, l'équation différentielle connue de la surface capillaire.

Pour déterminer λ, on remarquera que, pour les points appartenant à la surface du liquide extérieur au tube, $R=\infty$, $R'=\infty$; donc $z+\lambda=0$. Si donc z est compté à partir du niveau du liquide dans le vase, $\lambda=0$, et l'équation trouvée devient

$$z+\alpha^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=0.$$

Pour avoir la condition relative au contour de la surface U, nous supposerons que l'on fasse varier la figure du liquide sans conserver à U le même contour ; la différence entre U et la portion *correspondante* de la surface infiniment voisine qui la remplace sera toujours

$$\int \varepsilon d\omega\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

Mais il faut encore ajouter la portion de la nouvelle surface qui ne correspond à aucun point de U, c'est-à-dire la petite zone comprise entre le tube et la courbe suivant laquelle les normales aux différents points du contour de U coupent la surface infiniment voisine. Or on voit sans peine qu'en désignant par dP l'élément du contour qui termine U, et par i l'angle compris entre le plan tangent du tube et celui

de U, cette petite zone a pour expression

$$\int dP\,\varepsilon \cot i;$$

la variation du volume sera composée du terme écrit précédemment

$$\int d\omega\,\varepsilon$$

représentant le volume compris entre U et la portion correspondante de la surface voisine, et d'un autre terme exprimant le volume infiniment petit du second ordre compris entre les parois du tube et la surface gauche lieu des normales menées à U par les différents points de son contour; mais ce dernier terme peut être négligé comme infiniment petit par rapport aux précédents: il en est de même du terme analogue provenant de la variation de $\int z\,dv$. Quant à la surface T, qui dans le cas précédent n'avait pas varié, on voit sans peine qu'elle a augmenté de la portion de surface du tube comprise entre la courbe qui limite U et le nouveau contour qui la remplace, c'est-à-dire de l'intégrale

$$\int \frac{\varepsilon\,dP}{\sin i};$$

les termes dus à la variation des limites sont donc

$$\int \varepsilon\,dP\left(\frac{\alpha^2-2\beta^2}{\sin i}+\alpha^2\cot i\right).$$

Pour qu'ils disparaissent quel que soit ε, il faut que

$$\frac{(\alpha^2-2\beta^2)}{\sin i}+\alpha^2\cot i=0,$$

c'est-à-dire

$$\cos i=\frac{\alpha^2-2\beta^2}{\alpha^2},$$

ce qui prouve que l'angle i doit avoir une valeur constante qui dépend de la nature du liquide et de celle du tube.

Si $\frac{2\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}$ était plus grand que 1, c'est-à-dire si β^2 surpassait α^2, la formule précédente donnerait pour l'angle i une valeur imaginaire; il faut en conclure que, dans ce cas, les hypothèses faites jusqu'ici sont

inadmissibles et que le liquide doit former une couche extrêmement mince qui mouille les parois bien au-dessus de la surface qui limite la masse du liquide soulevé. Dans ce cas, les deux intégrales quadruples que nous avons négligées peuvent ne pas avoir une valeur très-petite. On suppose qu'alors tout se passe comme si le tube était fermé par la couche liquide très-mince qui mouille les parois, auquel cas on aurait $\beta^2 = \alpha^2$, et, par suite, $\cos i = 1$.

V.

Nous avons obtenu les deux résultats qui permettent de ramener à une question d'analyse la solution d'un problème quelconque relatif aux phénomènes capillaires. L'équation différentielle de la surface capillaire avait été obtenue par Laplace d'une manière un peu plus simple; mais le raisonnement au moyen duquel il prouve que l'angle désigné par i est constant, était, comme l'a remarqué M. Gauss, fort peu satisfaisant. Un des résultats les plus remarquables que Laplace ait déduit de ses formules, est l'expression rigoureuse du volume total du liquide soulevé dans le cas d'un tube cylindrique à parois verticales, dont la section peut d'ailleurs être quelconque. Je crois que la démonstration suivante a sur celle de Laplace l'avantage de la simplicité.

En prenant pour plan des xy le niveau du liquide extérieur, l'équation différentielle de la surface capillaire est

$$z = -\alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $dx\,dy$ et intégrons dans toute l'étendue de la surface qui sert de base au cylindre droit dans lequel s'élève le liquide; nous aurons évidemment dans le premier membre le volume total du liquide soulevé, et pour avoir la valeur du second il suffit d'effectuer l'intégration

$$\iint dx\,dy\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Or on peut évidemment regarder cette intégrale comme la composante verticale d'un système de forces qui, s'exerçant sur toute la surface du liquide, auraient sur chaque élément $d\omega$ une intensité

égale à $d\omega\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$. Mais un pareil système peut être remplacé de la manière suivante par deux autres systèmes beaucoup plus simples : concevons une surface parallèle à celle du liquide et située à une distance infiniment petite ε, j'entends par là une surface obtenue en portant sur chaque normale une longueur constante ε; supposons que chaque élément $d\omega'$ de cette surface soit pressé par une force $\frac{1}{\varepsilon}d\omega'$, et que chaque élément $d\omega$ de la première surface le soit en sens contraire par une force $\frac{1}{\varepsilon}d\omega$. Si $d\omega$ et $d\omega'$ sont deux éléments correspondants, d'après un théorème déjà cité dans ce Mémoire, on aura

$$d\omega' - d\omega = d\omega\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\varepsilon,$$

de sorte que la différence des deux forces est précisément égale à

$$d\omega\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

On pourra donc, au lieu de composer les forces proposées pour chercher leur composante verticale, chercher séparément la composante provenant de chacun des deux systèmes dont nous avons parlé. Or on sait qu'une surface quelconque étant soumise à une pression normale constante, la résultante des forces qui la sollicitent donne une composante verticale égale au produit de la pression rapportée à l'unité de surface par la projection horizontale de la surface considérée ; nous aurons donc, en nommant P_1 et P_2, les projections de la surface du liquide et de la surface parallèle,

$$\iint dx\,dy\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) = (P_1 - P_2)\frac{1}{\varepsilon}.$$

Or $P_1 - P_2$ est évidemment la projection de la surface gauche formée par les normales de longueur ε, menées par les points du contour, projection qui, à cause de l'inclinaison constante de ces normales, est égale, comme on le voit facilement, au produit du périmètre de la section droite par $\varepsilon \cos i$, i étant l'angle de la normale à la surface U, avec la normale à la surface cylindrique. Nous avons donc enfin, en nommant L le contour de la section droite du tube et V le volume du

liquide soulevé,

$$V = \alpha^2 L \cos i,$$

ce qui est, à la notation près, le résultat de Laplace.

VI.

La méthode de M. Gauss suppose qu'aucune force extérieure autre que la pesanteur n'agisse sur le liquide. Si l'on admet, par exemple, que la pression atmosphérique ne soit pas la même dans l'intérieur du tube qu'à l'extérieur, il faudra, dans l'évaluation des moments virtuels des forces du système, avoir égard à ces forces de pression, et, par conséquent, au lieu d'égaler à zéro la variation de la fonction qui a été désignée plus haut par Ω, il conviendra d'écrire qu'elle est égale et contraire à la somme des moments virtuels des forces de pression. Supposons que la pression qui s'exerce sur le niveau extérieure du liquide soit P, et désignons par P′ celle que supporte le liquide soulevé dans le tube; reprenons l'expression de Ω qui a été calculée plus haut,

$$\Omega = -g\rho\int z\,dv + \frac{1}{2}\rho^2 v\psi(o) - \frac{1}{2}\Pi\rho^2 t\theta(o) + \Pi\rho\rho' T\theta(o),$$

cette expression devient, en y introduisant les conventions

$$\alpha^2 = \frac{\Pi\rho\theta(o)}{2g},$$

$$\beta^2 = \frac{\Pi\rho'\theta(o)}{2g},$$

$$\Omega = -g\rho\int z\,dv + \frac{1}{2}\rho^2 v\psi(o) - \rho g\alpha^2 t + 2\rho g\beta^2 T,$$

ou, en faisant comme plus haut, $t = T + U$,

$$\Omega = -g\rho\int z\,dv + \frac{1}{2}\rho^2 v\psi(o) - \rho g\alpha^2 U + \rho g T(2\beta^2 - \alpha^2).$$

La variation $\delta\Omega$ doit être, pour l'équilibre, égale et de signe contraire à la somme des moments virtuels des forces de pression. Supposons que le tube soit un cylindre droit vertical et écrivons que cette condi-

tion est remplie pour un déplacement virtuel consistant à abaisser d'une même quantité dh dans le sens de la verticale tous les points de la portion de surface U qui correspond au liquide situé dans l'intérieur du tube, et à élever en même temps d'une autre quantité dh' tous les points de la surface extérieure. Le rapport de dh à dh' étant calculé de manière à ce que le volume total reste invariable, on verra sans peine que, pour un pareil déplacement, la surface U n'étant pas changée, et nommant L le contour de la section intérieure du tube et L' celui de la section du vase que nous supposerons aussi cylindrique, la variation de Ω sera

$$-g\rho\delta\int z dv + g\rho(\alpha^2 - 2\beta^2)(-l dh + \mathrm{L} dh').$$

Or $\delta\int z dv$ est la somme des moments des différents cylindres tronqués de hauteur dh ou dh' dont le volume liquide s'est diminué ou augmenté; l'un quelconque de ces cylindres ayant pour mesure le produit de dh par sa section droite que l'on peut représenter par $dx\,dy$, on aura

$$\delta\int z dv = -dh\int z dx dy + dh'\int z dx dy.$$

La première intégrale s'étendant à la portion du liquide intérieur au tube, elle peut représenter le volume du liquide soulevé si z est compté à partir du niveau du liquide extérieur, hypothèse qui annule la seconde intégrale.

Remplaçant $\delta\int z dv$ par cette valeur, et remarquant que le rapport de dh à dh' doit être le rapport inverse de la section du cylindre à celle du vase dans lequel il est plongé, nommant b et B ces sections, il viendra

$$\delta\Omega = \left[-\mathrm{V}g\rho + g\rho(2\beta^2 - \alpha^2)\left(\mathrm{L} - \frac{b\mathrm{L}}{\mathrm{B}}\right)\right] dh.$$

La somme des moments virtuels dus aux forces de pression peut facilement se calculer. Si, en effet, on considère un élément $d\omega$ de la surface U, la pression qu'il supporte sera $\mathrm{P}d\omega$ ou $\mathrm{P}'d\omega$, suivant qu'il appartiendra à la portion de surface intérieure au tube ou au niveau

extérieur. Le déplacement virtuel du point d'application sera le produit de dh, par le cosinus de l'angle que l'élément pressé fait avec la verticale, ce qui donnera le produit de $\mathrm{P}dh$ ou de $\mathrm{P}'dh'$ par la projection de l'élément $d\omega$, et, par conséquent, pour intégrale, $\mathrm{P}bdh$ ou $-\mathrm{P}'\mathrm{B}dh'$, suivant qu'il s'agira du liquide intérieur ou extérieur au tube; en remarquant que $bdh = \mathrm{B}dh'$, la somme de ces deux intégrales sera $(\mathrm{P}-\mathrm{P}')\,bdh$. Nous aurons donc enfin pour équation d'équilibre

$$-\mathrm{V}g\rho + g\rho\,(2\beta^2 - \alpha^2)\left(\mathrm{L} - \frac{b\mathrm{L}}{\mathrm{B}}\right) = (\mathrm{P}' - \mathrm{P})\,b.$$

Si nous appelons h la hauteur d'une colonne liquide de volume V, ayant b pour base, ou, en d'autres termes, la hauteur moyenne du liquide soulevé, nous tirerons de cette équation,

$$h = (\alpha^2 - 2\beta^2)\left(\frac{l}{b} - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{B}}\right) + \frac{(\mathrm{P}-\mathrm{P}')}{g\rho}.$$

On peut négliger, dans ce résultat, $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{B}}$ par rapport à $\frac{l}{b}$, et si l'on remplace en même temps $\alpha^2 - 2\beta^2$ par sa valeur trouvée plus haut, $\alpha^2\cos i$, i étant l'angle formé par le liquide avec la surface capillaire, il viendra

$$h = \alpha^2\,\frac{l}{b}\cos i + \frac{\mathrm{P}-\mathrm{P}'}{g\rho};$$

ce qui prouve que la hauteur h se composera de deux parties, l'une précisément égale à l'élévation calculée plus haut pour le cas de $\mathrm{P}'=\mathrm{P}$, et l'autre égale à la différence du niveau *due* à l'excès de la pression extérieure sur la pression intérieure.

Si au lieu de considérer, comme dans le raisonnement précédent, le cas d'un tube plongé dans un liquide, nous supposons une colonne liquide suspendue dans un tube et supportant sur ses deux surfaces des pressions différentes, nous verrons qu'en donnant à tous les points un mouvement vertical commun, dans le sens de la verticale, $\delta\mathrm{U}$ et $\delta\mathrm{T}$ seront nuls, et $\delta\Omega$ se réduira à $-g\rho\mathrm{V}$; et en égalant ce moment virtuel à $(\mathrm{P}'-\mathrm{P})\,b$, nous verrons que le poids de la colonne sera simplement proportionnel à la différence des pressions, et que la capillarité n'aura sur le phénomême aucune influence. Si, comme cas particulier, nous supposions $\mathrm{P}=\mathrm{P}'$, il viendrait $\mathrm{V}=0$.

Les faits contraires à ce résultat doivent s'expliquer par l'influence du frottement.

On déduit immédiatement des résultats précédents le premier des théorèmes énoncés au commencement de ce Mémoire. Si la colonne de liquide, située dans un tube capillaire ouvert par les deux bouts, est séparée en plusieurs parties par des bulles d'air interposées, quelle que soit la densité de ces bulles d'air et leur nombre, le poids total du liquide soulevé restera le même.

VII.

Je considérerai maintenant un phénomène bien connu qui semble au premier abord contredire les résultats de l'analyse précédente.

On sait qu'un tube capillaire ouvert par les deux bouts peut contenir une colonne à peu près double en hauteur de celle qu'il soulève quand on le plonge dans une masse liquide; il suffit, comme on sait, que la colonne liquide occupe la partie inférieure du tube et y forme un ménisque par la courbure duquel on explique cette augmentation de hauteur. Pour concilier ce fait avec le théorème démontré plus haut, il faut remarquer qu'en général, dans l'application du principe des vitesses virtuelles, la somme des moments virtuels correspondant à un certain déplacement du système ne doit être nulle que quand un déplacement égal et contraire est possible, et fournit une somme de moments précisément de signe contraire à celle qui correspond au premier. Quand cette condition n'est pas remplie, il suffit pour l'équilibre que la somme des moments virtuels, sans être nulle, ne puisse jamais devenir positive. Or, dans le cas qui nous occupe, si, pour appliquer le raisonnement du paragraphe précédent, nous donnons au liquide un mouvement virtuel qui consiste à élever d'une même quantité toutes les molécules contenues dans l'intérieur du tube, de manière à ne pas changer la surface désignée par U et T, un déplacement égal et contraire, déplacement auquel les liaisons ne s'opposent nullement, entraînerait un changement dans la valeur de U et de T; car le tube ne s'étendant plus au-dessus du contour actuel de la surface U, on ne peut abaisser cette surface, sans supposer que le liquide forme au-dessous du niveau inférieur du tube un petit cylindre complétement extérieur, dont la

surface convexe doit être considérée comme faisant partie de U. La variation de T cessera également d'être nulle, car la diminution que cette surface éprouve vers le haut de la colonne ne sera plus compensée par un accroissement égal à la partie inférieure.

D'après ces remarques, on trouvera, en nommant dh le mouvement virtuel donné au système et désignant comme à l'ordinaire par L et b le contour et la section droite du tube,

$$\delta\Omega = g\rho V dh - g\rho\alpha^2 L dh - \rho g(2.\beta^2 - \alpha^2) L dh;$$

et comme $\delta\Omega$ doit être négatif, il vient

$$V < 2\beta^2 L.$$

Or on a trouvé plus haut que le volume V', qui serait soulevé par ce tube plongeant dans une masse indéfinie de liquide, serait

$$V' = \alpha^2 L \cos i.$$

On a donc

$$\frac{V}{V'} < \frac{2\beta^2}{\alpha^2 \cos i},$$

ou, en remarquant que $\frac{2\beta^2}{\alpha^2} = 1 + \cos i$,

$$\frac{V}{V'} < 1 + \frac{1}{\cos i},$$

ce qui est précisément le résultat énoncé au commencement de ce Mémoire.

La méthode précédente ne donne pas la valeur précise du rapport $\frac{V'}{V}$, mais seulement une limite de ce rapport: on doit remarquer qu'une détermination exacte de sa valeur est, en effet, complétement impossible; car si, dans les circonstances que nous avons admises, une certaine colonne liquide peut se maintenir dans le tube, à plus forte raison en sera-t-il de même d'une colonne moindre. Il faudrait néanmoins, pour que la solution fût complétement satisfaisante, pouvoir démontrer que la limite trouvée peut, en réalité, être atteinte.

VIII.

En appliquant la méthode exposée au commencement de ce Mémoire au cas de deux liquides superposés dans un même tube, on trouve sans difficulté qu'en désignant par U la surface qui limite le liquide supérieur, par U′ la surface de séparation des deux liquides dans le tube, par U″ la surface libre du liquide extérieur renfermé dans le vase, par T et T′ les portions appartenant à la surface du tube ou à celles du vase qui sont mouillées par le liquide supérieur et inférieur, par ρ et ρ' les densités du liquide supérieur et inférieur, et enfin par α^2, β^2, α'^2, β'^2, α''^2, β''^2 des constantes analogues à celles qui ont été définies plus haut; il faut pour l'équilibre que la somme

$$\begin{aligned} K = \rho\int z\,dv + \rho'\int z\,dv' + \alpha^2\rho\,U + (\alpha^2 - 2\beta^2)\,\rho T \\ + (\alpha^2\rho + \alpha'^2\rho' - 2\beta''^2\rho')\,U' + (\alpha'^2\rho' - 2\beta'^2\rho')\,T' + \alpha'^2\rho'\,U'' \end{aligned}$$

soit un minimum.

Or, en donnant un déplacement virtuel commun à tous les points de la masse intérieure au tube et un déplacement inverse à chaque point de la masse extérieure, on devra avoir

$$o = -\rho bh - \rho' bh' + (\alpha'^2\rho' - 2\beta'^2\rho')\,L - (\alpha'^2 - 2\beta'^2)\,\frac{Lb}{B}\,\rho',$$

d'où l'on peut tirer pour $\rho h + \rho' h'$ une valeur qui ne dépend nullement de la nature du liquide supérieur.

IX.

Parmi les nombreux phénomènes qui se rattachent à la capillarité, l'un des plus simples et des plus faciles à étudier expérimentalement me semble celui de la formation des gouttes de mercure sur un plan horizontal de verre. Les principes précédents s'appliquent sans difficulté à l'étude de ces phénomènes et conduisent à quelques résultats dont peut-être on pourra tirer parti.

Si une goutte de mercure repose sur un plan horizontal, l'équation

différentielle de la surface libre sera la même que celle d'un liquide placé dans un tube, c'est-à-dire

$$h - z = \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right):$$

seulement la constante h qui, dans les problèmes précédents, était déterminée par la position du niveau extérieur restera ici inconnue et ne pourra être obtenue qu'en égalant le volume calculé de la goutte au volume donné du liquide qui la forme. Dans le cas particulier où la goutte est fort large, R et R' peuvent être considérés comme infinis pour les points de la surface supérieure; en sorte que, pour ces points, on doit supposer $z = h$, et que la constante h représente alors *l'épaisseur* de la goutte. Dans le cas général, pour définir cette constante, il faudrait supposer que la plaque sur laquelle repose le mercure est percée au centre même de la goutte qui communique, par un canal plein de liquide, avec un vase assez large pour que le liquide y soit horizontal; h désignerait alors l'élévation du niveau de ce liquide au-dessus de la plaque de verre.

En supposant que l'on parvienne à réaliser les circonstances que je viens d'indiquer et à déterminer ainsi par l'expérience la valeur de h, on peut obtenir entre les éléments mesurables d'une goutte de mercure une relation simple dont la vérification me paraîtrait importante.

Considérons l'équation

$$h - z = \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Multiplions par $dxdy$ et intégrons dans toute l'étendue de la projection de la goutte et pour tous les points de la surface libre de celle-ci, c'est-à-dire en prenant deux fois, avec des signes contraires, les ordonnées qui pourraient répondre à une même valeur de x et de y; nous aurons, en nommant V le volume de la goutte et b la surface de la base par laquelle elle repose sur le plan de verre,

$$bh - V = \int\int \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dx\, dy.$$

Or le second membre peut être considéré comme représentant la composante verticale d'un système de forces s'exerçant normalement sur

chaque élément $d\omega$ de la surface de la goutte avec une intensité égale à $\alpha^2 d\omega \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$; mais nous avons vu qu'un pareil système pouvait être remplacé par deux autres, dans lesquels une pression $\frac{\alpha^2 d\omega}{\varepsilon}$ s'exercerait sur chaque élément de la surface de la goutte et de la surface parallèle menée à la distance ε. Or chacun de ces systèmee de forces donne naissance à une composante verticale égale au produit de $\frac{\alpha^2}{\varepsilon}$ par la projection de la surface pressée; on voit facilement que la différence de ces deux projections est $\alpha L \varepsilon \sin i$, L étant le contour de la goutte et i l'inclinaison constante de son plan tangent sur le plan horizontal : l'intégrale qui est dans le second membre a donc pour valeur $-\alpha^2 L \sin i$, et nous avons

$$bh - V = -\alpha^2 L \sin i,$$

d'où

$$V = bh + \alpha^2 L \sin i,$$

relation qui paraît susceptible d'être vérifiée par l'expérience.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

« Dublin, le 10 novembre 1847.

» ... Ayant lu avec beaucoup d'intérêt les remarques que vous avez faites sur une Lettre de M. Thomson, je prends cette occasion de vous communiquer quelques développements relatifs à une méthode de transmutation des courbes planes et sphériques, qui comprend, comme cas particulier, celle que vous avez nommée la transformation par rayons vecteurs réciproques. Voici en quoi elle consiste :

» Étant donnée l'équation d'une courbe entre les coordonnées polaires, supposons qu'on substitue pour le rayon vecteur r, $R^{\pm n}$, et pour l'angle polaire ω, $n\Omega$; il est évident qu'il en résultera une nouvelle courbe rapportée aux coordonnées polaires R et Ω, et que

$$\frac{rd\omega}{dr} = \pm \frac{Rd\Omega}{dR}.$$

» Par conséquent, les angles que font les rayons vecteurs tirés de l'origine commune aux points correspondants sur les deux courbes, avec les tangentes, sont égaux; d'où il suit que si les courbes

$$F(r, \omega) = 0, \quad f(r, \omega) = 0$$

se coupent sous l'angle i, les courbes transformées

$$F(r^{\pm n}, n\omega) = 0, \quad f(r^{\pm n}, n\omega) = 0$$

se couperont aussi sous le même angle, au point correspondant à l'intersection des deux premières.

» Le cas le plus simple auquel on peut appliquer cette méthode est celui des droites

$$r\cos\omega = \alpha, \quad r\cos(\omega - \theta) = \beta$$

(où α et β sont des paramètres arbitraires, et θ un angle donné), qui se coupent toujours sous l'angle θ; d'où l'on déduit sans peine que les deux systèmes curvilignes

$$(1)\qquad r^{\pm n}\cos n\omega = \alpha^{\pm n},\quad r^{\pm n}\cos n(\omega-\theta) = \beta^{\pm n}$$

se coupent toujours, quels que soient α et β, sous l'angle constant $n\theta$.

» Ce résultat comprend quelques cas intéressants; par exemple, si $n = 2$, on a le théorème suivant :

» *Un système d'hyperboles équilatères, concentriques et semblablement placées, sera coupé par un autre tel système ayant le même centre que le premier, sous un angle constant double de celui que font les axes des deux systèmes.*

» En posant $n = \frac{1}{2}$, on peut dire que :

» *Un système de paraboles, ayant le même foyer et semblablement placées, sera coupé par un autre tel système, ayant le même foyer que le premier, sous un angle constant, moitié de celui que font les axes des deux systèmes.*

» Il est évident encore que :

» *Dans un triangle formé par trois arcs d'hyperboles équilatères, ayant le même centre (ou bien de paraboles ayant le même foyer), la somme des angles vaut deux angles droits.*

» Des théorèmes analogues existent pour les courbes de degré plus élevé contenues dans l'équation (1).

» On sait qu'en faisant $n = 2$, on transformera une section conique rapportée au foyer, dans une autre rapportée au centre. D'ailleurs, toutes les droites dans le plan de la conique deviendront des hyperboles équilatères, ayant pour centre commun le centre de la nouvelle conique, avec l'exception de celles passant par le foyer, qui seront transformées dans des diamètres de cette dernière. D'après cela, le théorème fondamental des propriétés polaires nous donnera cet autre :

» *Étant données une section conique et une hyperbole équilatère ayant le même centre, si d'un point quelconque sur l'hyperbole on mène les deux hyperboles équilatères concentriques, tangentes à la conique*

donnée, l'hyperbole équilatère concentrique passant par les deux points de contact passera par un point fixe.

» Dans une conique, si l'on tire du foyer deux droites aux extrémités d'une corde passant par un point fixe, le produit des tangentes trigonométriques des demi-angles que font ces deux droites avec celle menée du foyer au point fixe sera constant. Par conséquent :

» *Si l'on coupe une conique donnée par une hyperbole équilatère concentrique, et passant par un point fixe, le produit des tangentes trigonométriques des angles que font les deux diamètres passant par les points de l'intersection avec celui qui passe par le point fixe, sera constant.*

» Il est bon d'observer que, si l'on transforme un système de coniques homofocales par la méthode qu'on vient de considérer, les coniques résultantes seront aussi homofocales. Pour faciliter l'énoncé des propriétés qui dérivent de cette considération, nous désignerons une hyperbole équilatère, tangente à une conique et concentrique avec elle, par le nom de *tangente hyperbolique*. Cela posé, on aura les théorèmes suivants :

» *Étant données deux coniques homofocales, si d'un point quelconque sur l'extérieure on mène les deux tangentes hyperboliques à l'intérieure, les angles qu'elles font avec la première conique sont égaux.*

» *Étant données deux coniques homofocales, qu'on mène une tangente hyperbolique à l'intérieure; menons aussi, aux points que cette tangente détermine sur l'autre, deux tangentes hyperboliques à cette dernière. L'hyperbole équilatère, concentrique avec les coniques, et passant par le point de concours de ces tangentes et par le point de contact sur la conique intérieure, coupera cette conique, sous un angle droit.*

» On peut s'assurer sans peine qu'un cercle décrit autour du centre d'une conique du système primitif deviendra une cassinoïde, concentrique avec la conique transformée, dans le nouveau système. Par conséquent :

» *Étant données deux coniques homofocales, menons à l'une d'elles une tangente hyperbolique; puis menons à l'autre la tangente hyper-*

bolique qui coupera la première tangente à angle droit: le point de concours des deux tangentes décrira une cassinoïde.

» On sait que, si l'on mène du foyer d'une conique deux rayons vecteurs aux points de contact de deux tangentes, l'angle que font ces deux rayons sera divisé en parties égales par la droite qui passe par le foyer et par le point de concours des deux tangentes. Par conséquent :

» *Si du point de concours de deux tangentes hyperboliques à une conique on mène une droite passant par le centre, elle divisera en parties égales l'angle que font les deux diamètres passant par les points de contact.*

» Étant données deux tangentes à une conique, une troisième tangente quelconque, interceptée par les deux premières, soutendra un angle constant au foyer; ce qui nous donnera le théorème :

» *Étant données deux tangentes hyperboliques à une conique, l'arc d'une troisième tangente hyperbolique quelconque, qui est intercepté par les deux premières, soutendra un angle constant au centre.*

» On pourrait trouver une autre classe des propriétés analogues aux précédentes, en partant d'une section conique centrale, et en la transformant par la supposition de $n = \frac{1}{2}$. D'après cela, les droites, en général, deviendront des paraboles ayant pour foyer un des foyers de la conique transformée; mais les diamètres de la conique primitive seront transformés dans des droites passant par le foyer de la nouvelle conique, et les cercles autour du centre de la primitive dans des cercles autour du foyer de la transformée. Cela posé, et en désignant par le nom de *tangente parabolique* une parabole tangente à une conique, et ayant pour foyer un des foyers de la même conique, on aura :

» *Étant donnée une section conique et une parabole ayant pour foyer un des foyers de cette section, si d'un point quelconque sur la parabole on mène deux tangentes paraboliques à la conique, la parabole passant par les deux points de contact et ayant le même foyer que les autres, passera par un point fixe.*

» En se rappelant que, par cette substitution, un système de coniques homofocales sera transformé dans un autre système de

coniques homofocales elles-mêmes, il est évident qu'on peut énoncer, pour les tangentes paraboliques, des propriétés semblables à celles que nous avons données pour le cas des tangentes hyperboliques.

» La propriété bien connue, savoir, que le lieu de l'intersection de tangentes orthogonales à deux ellipses homofocales est un cercle concentrique, donne le théorème suivant :

» *Étant données deux ellipses homofocales, menons à l'une d'elles une tangente parabolique, puis menons à l'autre la tangente parabolique qui coupera la première tangente à angles droits : le point de concours des deux tangentes décrira un cercle dont le centre coïncide avec le foyer commun des tangentes paraboliques.*

» La corde passant par les points de contact de deux tangentes à une ellipse qui se coupent orthogonalement, est enveloppée par une ellipse homofocale. On aura donc :

» *Si l'on mène à une ellipse donnée deux tangentes paraboliques (ou hyperboliques) qui se coupent orthogonalement, et si l'on mène par les deux points de contact une parabole ayant le même foyer que les tangentes paraboliques (ou bien une hyperbole équilatère concentrique avec l'ellipse), cette dernière parabole (ou hyperbole) sera enveloppée par une ellipse homofocale avec la donnée.*

» On sait que si d'un point fixe sur une conique on mène deux cordes qui se coupent mutuellement à angles droits, la corde, menée par les deux points de leur intersection avec la conique, passera par un point fixe. Par conséquent :

» *Si par un point fixe sur une conique on mène deux paraboles ayant pour foyer un des foyers de la conique et se coupant orthogonalement, et si par les deux points de leur intersection avec la conique on fait passer une troisième parabole ayant le même foyer que les deux premières, cette dernière passera par un point fixe.*

» *Le même théorème a lieu encore si l'on remplace les trois paraboles ayant un foyer commun par trois hyperboles équilatères concentriques avec la conique donnée.*

» On obtient une application assez élégante de notre méthode, en

transformant un système de cercles concentriques, rapportés à un point fixe différent du centre. Je me bornerai, pour le moment, à la supposition de $n = 2$. Les résultats qu'on trouve ainsi pourront se généraliser sans la moindre difficulté.

» Il est évident que les cercles concentriques

$$r^2 - 2ar\cos\omega + a^2 = b^2, \tag{2}$$

où a désigne la distance invariable de l'origine au centre, et b le rayon d'un quelconque des cercles qui peut varier, se transformeront dans un système de cassinoïdes homofocales.

» Par conséquent, en se rappelant que quand deux cercles sont concentriques, une tangente quelconque au cercle intérieur coupe l'autre toujours sous le même angle, et en désignant par le nom de *tangente hyperbolique* une hyperbole équilatère tangente à une cassinoïde et concentrique avec elle, on aura :

» *Une tangente hyperbolique quelconque à l'intérieure des deux cassinoïdes homofocales coupe l'extérieure toujours sous le même angle.*

» En supposant que le rayon du cercle intérieur s'évanouit, on peut dire que :

» *Un système de cassinoïdes homofocales sera coupé orthogonalement par un système d'hyperboles équilatères passant par les foyers et concentriques avec les cassinoïdes.*

» Ce théorème, généralisé depuis par M. Serret, est dû à M. Lamé.

» Il est évident aussi que :

» *Étant données une cassinoïde et une hyperbole équilatère ayant le même centre, si d'un point quelconque sur l'hyperbole on mène les deux tangentes hyperboliques à la cassinoïde, l'hyperbole équilatère concentrique passant par les deux points de contact passera par un point fixe.*

» Voici quelques autres théorèmes qui se déduisent sans difficulté :

» *Étant donnés deux points fixes sur une cassinoïde, si par ces deux points et par un troisième, pris arbitrairement sur la courbe, on fait passer deux hyperboles équilatères, concentriques avec la cassinoïde, l'angle sous lequel elles se couperont sera constant.*

» *Étant données deux cassinoïdes homofocales, menons une tangente hyperbolique quelconque à l'intérieure; menons aussi aux points que cette tangente détermine sur l'autre, deux tangentes hyperboliques à cette dernière: leur point de concours décrira une cassinoïde homofocale.*

» *L'angle fait par ces deux tangentes sera constant, et les angles qu'elles font respectivement avec la cassinoïde, qui est lieu de leur intersection, seront égaux.*

» *Le point de contact sur l'intérieure et le point de concours des tangentes à l'extérieure appartiendront tous deux à la même hyperbole équilatère, concentrique avec les cassinoïdes et passant par les foyers.*

» *Le lieu des sommets de toutes les hyperboles équilatères, tangentes à une cassinoïde donnée et concentriques avec elle, sera la courbe lieu des projections orthogonales du centre d'une section conique sur ses tangentes.*

» Supposons maintenant que, dans l'équation (2), a varie, b restant le même; elle appartiendra évidemment à un système de cercles égaux, dont les centres sont tous situés sur la même droite. En se rappelant qu'une parallèle à cette droite coupera tous les cercles sous le même angle, on peut en déduire le théorème suivant :

» *Toutes les cassinoïdes concentriques et semblablement placées, dans lesquelles le rectangle formé par les rayons des foyers est constant, seront coupées sous le même angle par une hyperbole équilatère concentrique, ayant pour asymptotes les axes des cassinoïdes.*

» Par conséquent :

» *Toutes les cassinoïdes concentriques et semblablement placées, dans lesquelles le rectangle formé par les rayons des foyers est constant, seront enveloppées par une hyperbole équilatère concentrique, ayant pour asymptotes les axes des cassinoïdes.*

» Il est évident aussi que :

» *Étant donné un système de cassinoïdes, tel qu'il en a été question dans les deux derniers théorèmes, qu'on mène aux points où une quelconque d'elles est coupée par une hyperbole équilatère concen-*

trique ayant pour asymptotes les axes des cassinoïdes, deux tangentes hyperboliques, leur point de concours décrira une hyperbole équilatère concentrique, ayant pour asymptotes les axes des cassinoïdes.

» On verra facilement que l'équation d'une droite quelconque, passant par le centre d'un cercle représenté par l'équation (2), peut s'écrire sous la forme

$$r\cos(\omega - \theta) = a\cos\theta,$$

θ étant le complément de l'angle fait par cette ligne avec l'axe fixe.

» Par conséquent, on est à même d'énoncer immédiatement le théorème suivant :

» *Toutes les courbes*

$$(3)\qquad r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n},$$

dans lesquelles b varie, seront coupées orthogonalement par les courbes

$$(4)\qquad r^n \cos n(\omega - \theta) = a^n \cos n\theta,$$

dans lesquelles θ est un paramètre variable.

» C'est la généralisation donnée par M. Serret du théorème de M. Lamé.

» Dans le cas de n entier positif, la courbe (3) est lieu géométrique d'un point tel, que le produit de ses distances aux sommets d'un polygone régulier de n côtés et de rayon a soit constant (b^n). Elle peut donc s'appeler *cassinoïde à n foyers*. La courbe représentée par (4) jouit d'une propriété analogue ; elle est lieu géométrique d'un point tel, que le produit de ses distances aux sommets d'un polygone régulier de n côtés soit égal à la $n^{ième}$ puissance de sa distance au centre du cercle circonscrit au polygone. On peut appeler cette courbe, ce me semble, *hyperbole équilatère à n foyers*. Cela posé, il est évident que nous sommes en droit d'énoncer des théorèmes relatifs aux cassinoïdes et aux hyperboles équilatères *à n foyers*, entièrement semblables à ceux que nous avons donnés pour des cassinoïdes et des hyperboles équilatères ordinaires à deux foyers.

» Il s'ensuit sans difficulté que, si l'on désigne par r et ω les coordonnées polaires de la courbe primitive, et par R et Ω celles de la transformée, on a

$$dr^2 + r^2 d\omega^2 = n^2 R^{2n-2}(dR^2 + R^2 d\Omega^2).$$

Par conséquent, s étant l'arc de la primitive, et σ celui de la transformée,

$$d\sigma = \frac{1}{n}\frac{ds}{r^{\frac{n-1}{n}}}.$$

» Maintenant l'arc du cercle représenté par (2) a pour différentielle $bd\theta$, θ étant le paramètre dans l'équation

$$r\cos(\omega - \theta) = a\cos\theta,$$

qui appartient à une droite passant par le centre; et il est clair aussi que cette équation détermine deux rayons vecteurs, selon qu'on prend θ positif ou négatif. Un peu d'attention nous fera voir que ces deux rayons seront donnés par l'équation

$$r^2 = a^2 \pm 2ab\sin\theta + b^2,$$

en sorte qu'on peut conclure, sans aucun calcul, que l'arc de la courbe

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n}$$

a pour expression

$$b^n \int \frac{d\theta}{(a^{2n} \pm 2a^n b^n \sin n\theta + b^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}},$$

θ étant le paramètre dans l'équation

$$r^n \cos n(\omega - \theta) = a^n \cos n\theta,$$

qui appartient aux courbes orthogonales.

» Lorsque $n = 2$, on retombe sur l'expression pour l'arc de la cassinoïde, donnée par M. Serret dans le tome IX de ce Journal; si l'on fait $n = 3$, l'arc est encore exprimable par deux fonctions elliptiques de première espèce. (*Traité des Fonctions elliptiques,* tome I, page 180.)

» Il est digne de remarque que l'expression générale nous fournit une représentation, par un seul arc d'une courbe algébrique, de la transcendante $\int \frac{d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\varphi)^\alpha}$, pour toutes les valeurs de α, sauf $\frac{1}{2}$.

» La méthode correspondante à la précédente pour le cas de courbes sphériques consiste à faire dans l'équation d'une courbe entre les

coordonnées polaires sphériques (ρ et ω),

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \rho = k (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \mathrm{R})^{\pm n}, \quad \omega = n\Omega$$

k étant une quantité constante quelconque), ce qui donne

$$\frac{\sin \rho \, d\omega}{d\rho} = \pm \frac{\sin \mathrm{R} \, d\Omega}{d\mathrm{R}};$$

c'est-à-dire que si deux courbes (entre les coordonnées ρ et ω) se coupent sous un certain angle, les courbes transformées (entre R et Ω) se couperont au point correspondant sous le même angle. Si l'on désire avoir la transformation la plus générale de ce genre, on ne saurait se passer du coefficient constant k, parce qu'en attribuant des valeurs diverses à cette constante, on obtient des courbes tout à fait différentes; ce qui n'aurait pas lieu sur le plan à cause de la similitude. On verra aussi qu'en supposant même que k soit imaginaire, on sera conduit à des résultats réels et véritables.

» Posons le cas des petits cercles concentriques qui sont tous coupés orthogonalement par de grands cercles passant par le centre. L'équation polaire d'un petit cercle de rayon sphérique b, dont le centre est placé à une distance a de l'origine des coordonnées, est

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\rho - \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \, (1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b)}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \rho \cos \omega \\ &\qquad + \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b} = 0, \end{aligned} \right.$$

et, en désignant par θ l'angle que fait avec l'axe fixe un arc perpendiculaire abaissé de l'origine sur un grand cercle quelconque, passant par le centre, on aura, pour l'équation de ce dernier,

$$(6) \quad \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \rho}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a} \frac{\cos(\omega - \theta)}{\cos \theta}.$$

Des équations (5) et (6), dans lesquelles b et θ sont des paramètres variables, on peut évidemment déduire un nombre infini de systèmes de trajectoires orthogonales; mais je n'en considérerai qu'un qui répond à une transformation imaginaire. Posons, en effet,

$$\begin{aligned} &\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \rho = \sqrt{-1} \, (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \mathrm{R})^2, \quad \omega = 2\Omega, \\ &\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{-1} \, (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha)^2, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b = \sqrt{-1} \, (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \beta)^2, \end{aligned}$$

ce qui nous donnera

$$\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2} R - \frac{2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha \,(1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta)}{1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} R \cos 2\Omega$$

$$+ \frac{\operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta}{1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta} = 0,$$

$$\frac{1 + \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} R}{1 + \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} R}{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha} \, \frac{\cos 2(\omega - \theta)}{\cos 2\theta},$$

pour les deux équations de deux systèmes orthogonaux, dans lesquels β et θ sont les paramètres. Ces équations ont été déjà données par mon frère dans une Note insérée dans ce Journal, tome X, page 251. La première appartient à un système de cassinoïdes sphériques homofocales, si l'on prend pour définition de la cassinoïde sphérique le lieu d'un point tel que, si l'on mène de là deux arcs de grands cercles aux deux points fixes, le produit des tangentes trigonométriques des demi-arcs soit constant. L'autre représente un système de sphéro-coniques, ayant même centre et un point commun, de l'espèce que j'ai montré jouir des analogies les plus frappantes avec l'hyperbole équilatère vulgaire (la relation entre les demi-axes μ, ν sera $\sin \mu = \operatorname{tang} \nu$). On peut retrouver avec la même facilité tous les autres résultats de géométrie sphérique consignés dans l'article de mon frère.

» Il peut être utile de remarquer qu'à l'aide de la même substitution imaginaire, savoir,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \rho = \sqrt{-1}\, (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} R)^2, \quad \omega = 2\Omega,$$

on transformera une sphéro-conique rapportée au foyer, dans une autre rapportée au centre, tandis que la substitution

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \rho = \sqrt[4]{-1}\, (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} R)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega = \tfrac{1}{2} \Omega,$$

servira à transformer une sphéro-conique centrale dans une autre relative au foyer. Il est évident qu'en appliquant l'une ou l'autre de ces méthodes à un système de coniques homofocales, il en résultera un autre système de coniques aussi homofocales.

» Le cas particulier de $n = -1$, ou celui des rayons vecteurs réciproques qui s'applique aux surfaces, a été traité avec détail par

M. Stubbs, actuellement fellow de notre université, dans le Tome XXIII du *Philosophical Magazine*, novembre 1843; où, en combinant cette méthode avec le théorème de M. Ch. Dupin, il est parvenu à une construction géométrique des lignes de courbure sur la surface nommée d'*élasticité* dans l'optique.

» La substitution des tangentes curvilignes aux tangentes rectilignes pourra peut-être servir pour l'illustration géométrique des théorèmes relatifs aux transcendantes intégrales. Mais je dois laisser cette application aux géomètres plus forts que moi.... »

Note de M. Liouville.

Les théorèmes que M. Roberts donne dans cet article ne sont relatifs qu'à un cas très-particulier de la transformation *géographique* des figures tracées sur un plan ou sur une surface en d'autres figures tracées soit sur la même surface, soit sur une surface différente. La condition fondamentale de cette transformation géographique, telle que Lagrange et M. Gauss l'ont posée, consiste, en effet, en ce que la figure transformée et la figure primitive doivent rester semblables l'une à l'autre dans leurs éléments infiniment petits. Cette condition est remplie dans le cas particulier que M. Roberts considère, et c'est uniquement de là que naissent tous les théorèmes qu'il a signalés. Les analogues de ces théorèmes auront donc lieu dans le cas général. Mais la transformation par rayons vecteurs réciproques jouit seule du caractère singulier de s'étendre à un nombre quelconque de variables, et, par conséquent, de fournir, entre autres résultats, une sorte de transformation géographique à trois dimensions, c'est-à-dire une solution de l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2),$$

équation bien plus difficile à traiter que celle pour le plan

$$dx^2 + dy^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

de laquelle on déduit aisément

$$x + y\sqrt{-1} = f(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}),$$

formule qui conduit à celles de M. Roberts en prenant pour la fonction f une simple puissance.

REMARQUES DIVERSES

SUR LES POSITIONS ET LES FIGURES D'ÉQUILIBRE;

Par M. STEICHEN,

Professeur à l'École militaire de Bruxelles.

La Note de M. Lejeune-Dirichlet sur les positions d'équilibre *stable* et *instable*, insérée dans le tome XII de ce Journal (page 474), m'a donné l'idée de présenter quelques remarques que j'ai faites depuis longtemps sur le même sujet.

Le point de vue sous lequel on envisage habituellement la chose dans la mécanique rationnelle me semble trop restreint, puisque l'on n'y considère qu'un système de points matériels, soumis à des forces *attractives* ou *répulsives* qui ne dépendent que de la distance, etc.; et que, d'un autre côté, l'on ne voit pas même par là jusqu'à quel point la proposition que l'on veut démontrer est susceptible d'application aux machines et aux systèmes terrestres en général, même abstraction faite des résistances passives.

Pour mettre dans les idées cette clarté si nécessaire, alors surtout qu'il s'agit de propositions générales plus ou moins vagues, nous pensons qu'il est utile de distinguer *les positions d'équilibre* des systèmes rigides, et *les figures d'équilibre* des systèmes et machines qui sont sujets à varier de forme tant par l'effet des vitesses acquises que par l'action même des forces qui y sont appliquées. Dans ce même but, nous allons reprendre quelques définitions.

La *position d'équilibre* d'un corps rigide, soumis à des forces données, est cette position spéciale pour laquelle ces forces se font équilibre, et telle que si le corps est dérangé par une force ou impulsion étrangère qui cesse ensuite, l'équilibre ne subsiste généralement plus.

La *position d'équilibre stable* est celle à laquelle le corps tend à

revenir sous l'action des forces appliquées, après qu'il en a été dérangé, n'importe de quelle manière.

La *position d'équilibre instable* est celle dont le solide, une fois dérangé quelque peu que ce soit, s'écarte de plus en plus par l'effet même des forces primitives.

La *position d'équilibre indifférente* est celle dont le corps, une fois dérangé par une cause étrangère, ne tend ni à se rapprocher ni à s'écarter par l'effet même des forces primitives.

On définirait de même les *figures* d'équilibre stable, instable, indifférente, dans les machines.

Habituellement on ne s'arrête pas à ces sortes de définitions, parce que l'on juge que la chose se définit suffisamment par les mots *stable* et *instable* qui l'expriment; mais on n'en admet pas moins d'une manière indirecte les idées que nous exprimons par une définition formelle de mots.

On ne pourra donc pas, croyons-nous, objecter que nous mettions dans nos définitions plus qu'il ne faut et qu'on ne le fait ordinairement; et la seule difficulté qui se présente consiste à ne pas pouvoir démontrer immédiatement ce que l'on définit. Mais à défaut de pouvoir surmonter cette difficulté, ou plutôt d'éviter cet inconvénient, nous devons ici nous contenter (ce qui arrive d'ailleurs dans d'autres cas) de raisonner dans la supposition que l'objet défini existe, sauf à justifier ensuite cette supposition par n'importe quelle espèce de démonstration.

Il y ici une différence essentielle à établir entre une machine et un système rigide: en effet, une machine n'est jamais susceptible que d'un mouvement ou que d'un dérangement unique dans un sens défini ou dans le sens diamétralement opposé, et c'est même là l'unique caractère commun à toutes les machines. Au contraire, un corps solide, même gêné par un ou plusieurs obstacles, est le plus souvent susceptible encore de plusieurs dérangements. Il faut donc au moins admettre comme une chose possible à priori, qu'un corps solide une fois dérangé de sa position d'équilibre, tende ou à reprendre cette position sous l'action des forces appliquées, ou à s'en écarter de plus en plus, selon le mode du dérangement produit.

Ainsi il se peut que pour de certains corps solides une même posi-

tion d'équilibre jouisse successivement de la propriété d'être stable, instable, indifférente.

L'ellipsoïde pesant et homogène, ayant ses trois diamètres conjugués rectangles inégaux entre eux, nous offre un exemple remarquable de ce càs, s'il repose par l'extrémité de son diamètre moyen sur un plan horizontal parfaitement uni sur lequel il puisse, par conséquent, rouler sans frottement. En effet, s'il y a à partir d'une section principale des directions consécutives qui doivent faire considérer la position initiale comme stable, il y aura à partir de la section principale perpendiculaire une infinité de directions elliptiques consécutives qui doivent faire envisager la même position comme instable. Il doit donc y avoir aussi une direction toute spéciale et intermédiaire qui donne à cette même position la propriété d'une position d'équilibre *neutre* ou *indifférente;* ce qui est confirmé par la propriété de l'ellipsoïde de pouvoir être coupé suivant deux circonférences de cercle par deux plans menés suivant l'axe moyen. L'exemple de l'ellipsoïde se trouve, il est vrai, déjà cité dans la *Mécanique* de Poisson, mais dans un sens un peu différent.

Dans les machines, il faut également admettre les trois espèces de figures d'équilibre, quoiqu'il serait peut-être très-difficile de citer un bon exemple d'une figure ou position d'équilibre *indifférente*. En effet, tant que l'on ne définit pas les machines sur lesquelles on veut raisonner, il faut reconnaître deux cas comme possibles: ou le centre de gravité des forces sollicitantes, ou plutôt de leurs poids équivalents, s'élève et s'abaisse alternativement au-dessus et au-dessous d'un même plan horizontal, ou il se déplace seulement dans un tel plan. Dans ce dernier cas, chaque figure, si toutefois il y a encore changement de figure, doit être une figure ou une position d'équilibre indifférente; car il y aura constamment équilibre dynamique entre les forces ou leurs poids équivalents, puisque la descente verticale et virtuelle est nulle par hypothèse, et que, par suite, il en est de même de la somme des moments virtuels de ces poids ou de ces forces. Mais le plus souvent, pour ne pas dire toujours, le centre de gravité dont il s'agit se rapproche et s'éloigne alternativement d'un même plan horizontal de comparaison, et alors pendant le mouvement utile de la machine l'équilibre dynamique n'a lieu généralement que quand le centre de

gravité est à sa plus grande hauteur ou profondeur : cette situation rend, en effet, nulle la somme des moments virtuels effectifs des forces, et la force vive totale de la machine sera, par conséquent aussi, en général, un *maximum* ou un *minimum*. Ceci est vrai quelle que soit la nature des forces sollicitantes, et se trouve indépendant de ces restrictions de forces attractives et répulsives, fonctions de la distance, restrictions avec lesquelles on a exposé et enseigné le principe des forces vives jusqu'à l'époque de M. Poncelet, qui a, selon nous, le mérite incontestable d'avoir le premier exposé ce même principe sous une nouvelle face et avec ce haut degré de clarté et de généralité qu'il n'avait pas auparavant. En effet, il est vrai de dire, pour tous les cas, que le demi-accroissement de force vive instantanée est équivalent à la somme des moments virtuels effectifs des forces, soit qu'il y ait, soit qu'il n'y ait pas de loi qui exprime la force en fonction du chemin décrit par son point d'application, à compter d'une position initiale quelconque. De plus, en prenant les choses du point de vue de M. Poncelet, on conçoit aussi immédiatement que, dans le cas actuel, la figure d'équilibre stable doit répondre à une force vive maximum du système. En effet, immédiatement après que celui-ci a passé par la figure de l'équilibre stable, en vertu des vitesses qui animent ses différentes parties, les forces sollicitantes tendront (par définition) à le ramener à cette position ou à cette figure, alors même qu'il s'en éloigne de plus en plus par l'effet de ces vitesses. Donc la somme des moments virtuels des forces qui jouent le rôle de résistances actives (on fait abstraction des résistances passives) est supérieure à la somme des moments des forces qui tendent dans le sens même du mouvement utile. Il suit de là que la force vive du système doit diminuer pendant tout le temps où la figure s'écarte de la figure d'équilibre stable : mais on verrait de même que la force vive doit augmenter pendant tout l'intervalle où la figure variable se rapproche de plus en plus de cette même figure d'équilibre; de sorte que la force vive maximum a lieu à l'instant même où le système affecte dans son mouvement révolutif la figure d'équilibre stable. Mais là où il y un mouvement périodique ou révolutif réglé ou non réglé, qui n'est pas censé s'éteindre à l'instar du mouvement oscillatoire, il faut qu'à un certain intervalle une force vive *minimum* succède à une force vive *maximum*;

cela est évident et résulte aussi de ce que, après le passage par la figure stable, l'accroissement de force vive a une valeur négative, de même que la somme totale des moments virtuels: il y aura donc diminution incessante de force vive jusqu'à l'époque où la figure variable sera telle, que les forces se fassent encore une fois équilibre, et que la somme des moments soit nulle. Mais cette nouvelle figure sera instable; car, immédiatement après le passage par cette figure, la force vive doit croître de nouveau pour pouvoir redevenir ensuite un maximum. Donc la somme totale des moments virtuels des forces doit avoir pour chaque instant une valeur positive sur toute l'étendue d'un intervalle fini, quelque petit qu'il soit d'ailleurs.

La figure d'équilibre dont il s'agit est donc telle, que si l'on y plaçait la machine avec une vitesse nulle, et qu'on l'en dérangeât ensuite un tant soit peu, dans l'un ou l'autre sens du seul mouvement possible, les forces qui tendraient dans le sens même du dérangement auraient une somme de moments virtuels, partant une tendance dynamique plus grande que la somme des moments des forces tendant en sens contraire. Or tel est précisément, par définition, le caractère de la figure d'équilibre instable qui correspond, par conséquent, à une force vive *minimum*.

Remarque I. Toutes les fois qu'il est question de figures d'équilibre stables et instables, il faut faire abstraction des frottements et des autres résistances passives, s'il y en a. En effet, en ayant égard aux frottements seuls, on peut déjà trouver diverses figures, toutes assez voisines d'une même figure d'équilibre, pour que la somme des moments virtuels de toutes les forces sollicitantes reste inférieure à la somme des moments virtuels des frottements, et chacune de ces figures sera pour la machine une figure de repos, et non pas une vraie figure d'équilibre.

Mais parmi toutes ces figures qui correspondent chacune à une inéquation de moments, il doit y en avoir une de chaque côté de la figure de l'équilibre idéal, qui réponde à une équation de moments, et c'est là la figure d'équilibre de la machine, eu égard aux frottements; c'est une *figure d'équilibre effectif ou physique*. Les figures de l'équilibre effectif existent donc bien aussi, mais elles ne sont pas les

mêmes que celles de l'équilibre rationnel. Toutefois elles en diffèrent d'autant moins que les frottements sont plus faibles, et c'est dans ce sens seulement qu'il est permis de les confondre les unes avec les autres dans de certains cas, tels que celui du pendule et d'un solide à surface continue, qui serait pesant et qui poserait sur une surface d'appui horizontale très-unie; car, dans des cas pareils, le frottement de glissement et celui de roulement sont réduits aux plus minimes proportions.

Remarque II. Il résulte de ce qui a été dit plus haut, qu'en admettant l'existence de la figure stable, l'existence de la figure instable en résulte comme une conséquence nécessaire. De plus, comme dans la plupart des machines il y a des pièces à mouvement alternatif, le mouvement uniforme rigoureux est impossible. Donc, puisque le mouvement d'un tel système est révolutif ou périodique, il faut qu'il y ait dans chaque cas pareil une position de force vive *maximum* et une autre de force vive *minimum absolue*, ce qui nous semble démontrer suffisamment l'existence des figures d'équilibre des machines en général. Mais, comme l'exception est du moins possible ici, c'est-à-dire comme il peut y avoir quelques cas de machines dans lesquelles le mouvement uniforme soit possible d'une manière permanente, sous l'action même des forces sollicitantes, chaque figure ou position de la machine sera alors une position d'équilibre indifférente. D'après cela, il nous paraît impossible et superflu de démontrer analytiquement et d'une manière générale l'existence des figures d'équilibre stables et instables; on est d'autant plus porté à en juger ainsi que, dans chaque cas défini, la recherche de ces figures doit dépendre d'une équation algébrique ou transcendante dans laquelle la réalité de diverses racines doit résulter de la forme de l'équation, partant du genre de machines pour lequel on raisonne.

Remarque III. Concevons qu'une machine, occupant d'abord sa position d'équilibre stable, en soit dérangée par une impulsion étrangère, avec une énergie et des vitesses trop faibles pour qu'elle puisse atteindre jusqu'à sa figure d'équilibre instable. Les forces sollicitantes éteindront ces vitesses et ramèneront ensuite la machine vers sa figure initiale qu'elle dépasse encore par l'effet des vitesses acquises du côté

opposé à celui vers lequel la portait l'impulsion initiale; mais, après un certain intervalle, les forces actives la ramèneront de nouveau à sa figure primitive, qu'elle dépassera encore pour continuer ainsi indéfiniment. C'est le cas le plus général du mouvement oscillatoire, qui serait perpétuel s'il pouvait se faire dans le vide et sans frottement. Mais, ces dernières conditions étant physiquement impossibles, les résistances passives absorberont, à chaque oscillation et à chaque écart de part et d'autre de la figure stable, une certaine quantité de travail, ce qui raccourcira graduellement l'amplitude des oscillations et ramènera finalement la machine à sa figure stable, ou, du moins, dans une position très-voisine, où elle restera désormais au repos sous l'action même des forces sollicitantes.

Le mouvement oscillatoire d'une machine de part et d'autre de la figure d'équilibre stable aura lieu toutes les fois que la force vive initiale imprimée est moindre que la double somme des quantités de travail des forces qui répondent aux espaces qui seraient décrits par leurs points d'action dans l'intervalle de la figure stable à la figure instable.

Si la force vive imprimée est précisément égale à cette double somme, la machine atteindra jusqu'à la figure instable où elle se maintiendra, et si cette force vive dépasse enfin l'autre quantité, le mouvement périodique et révolutif aura lieu; mais tout mouvement oscillatoire autour de la figure instable est impossible, car quelque faible que soit la cause qui dérange alors la machine, les forces sollicitantes l'en écarteront de plus en plus, et le mouvement révolutif aura lieu.

Remarque IV. Dans une machine à mouvement périodique, le centre de gravité des forces, ou plutôt de leurs poids équivalents, décrit ou une portion finie d'un axe vertical d'un mouvement alternatif, ou bien une courbe fermée; car, d'après ce qui est déjà dit, le cas où il se meut sur un même plan horizontal peut être laissé de côté. Ne considérons d'abord que le cas où ce centre a le mouvement vertical alternatif et celui où la courbe décrite n'a que deux tangentes horizontales. Alors, pendant toute la durée de sa descente, la somme des moments virtuels des poids équivalents est positive pour chaque instant; de sorte que, dans cet intervalle, la force vive s'accroît de

plus en plus, tandis que pendant la montée elle diminue constamment. On peut donc dire aussi que, quand la force vive est un minimum, le centre de gravité, non pas de la machine, mais des poids équivalents, y compris ceux de ses pièces, est le plus profondément placé, et qu'il est à sa plus grande élévation pour la figure d'équilibre instable. Mais la courbe fermée, *plane* ou *à double courbure,* parcourue par le centre en question, peut avoir plus de deux tangentes horizontales; de sorte que, pour de certains cas, il peut y avoir plus de deux figures d'équilibre.

Concevons la figure de la machine en repos, pour laquelle ce centre se trouve sur la courbe au point de contact avec l'une quelconque d des tangentes intermédiaires horizontales. L'équilibre subsistera entre les forces ou leurs poids équivalents; et la figure dont il s'agit sera *stable* ou *instable,* selon que la tangente d laissera entièrement au-dessus ou au-dessous d'elle les deux parties de courbe qui se raccordent en son point de contact: seulement cette stabilité est plus ou moins resserrée, selon que la tangente d est elle-même plus ou moins rapprochée d'une autre tangente horizontale supérieure. Une remarque analogue s'applique à la figure instable.

Mais si le point de contact de la courbe avec d est un point d'inflexion, il correspondra à une figure d'équilibre de la machine qui ne sera ni absolument stable ni absolument instable, et qui, néanmoins, participera de l'une et de l'autre de ces propriétés. En effet, comme alors une branche courbe se trouve inférieure à la tangente d, et l'autre supérieure, il s'ensuit que, si l'on dérange le système de manière à élever le centre de gravité, il reprendra ou du moins il tendra à reprendre la figure primitive; et si, par suite du dérangement, le centre s'abaisse, le système s'écartera de plus en plus et jusqu'à une nouvelle tangente horizontale, car les forces agiront alors dans le sens même du dérangement produit. Une telle figure d'équilibre d'une machine, qui répond à un point d'inflexion à tangente horizontale dans la courbe décrite par le centre de gravité des poids équivalents, est ce qu'on peut nommer une figure d'équilibre *ambiguë* ou *douteuse*. Lorsqu'une machine, dans son état dynamique, passe par une figure douteuse, la force vive, dont l'accroissement instantané est nul alors, ne sera cependant ni un *maximum* ni un *minimum*. En effet, dans le

cas où le mouvement du centre de gravité est ascendant, la force vive diminue pendant que ce point mobile s'élève vers le point d'inflexion; pendant l'instant où il décrit l'élément de d, la force vive reste stationnaire, pour diminuer ensuite par degrés insensibles pendant que le centre s'élève sur la courbe au-dessus de d, et jusqu'à atteindre une nouvelle tangente horizontale. Il est aisé de suivre pas à pas les diverses faces par lesquelles passe alternativement la force vive totale de la machine dont la valeur *maximum* absolue a évidemment lieu pour la position la plus profonde, et la valeur *minimum* absolue pour la position la plus élevée du centre de gravité des poids équivalents.

Nous conclurons de là, et conformément à la remarque présentée par M. Lejeune-Dirichlet, qu'il est inexact de dire, avec les auteurs de mécanique rationnelle, que les figures d'équilibre d'un système soient exclusivement et alternativement stables et instables, attendu qu'elles peuvent être séparées par une et même par plusieurs *figures douteuses*, dont nous venons de constater l'existence.

Mais nous ne croyons pas qu'il soit permis d'alléguer ici, avec l'auteur cité, l'exemple du pendule comme rentrant dans ces cas rares. En effet, le pendule nous offre un exemple tout spécial du mouvement oscillatoire autour de sa figure d'équilibre; et, pour de tels cas, les auteurs n'ont sans doute jamais entendu affirmer que là le système passe alternativement par sa figure stable et instable. Mais si l'on imagine au pendule une force vive initiale suffisante, il aura son mouvement révolutif complet; et comme le centre de gravité des forces qui le sollicitent, ou des poids de ses parties ici, décrit alors une circonférence de cercle, c'est-à-dire une courbe fermée qui n'admet que deux tangentes horizontales et aucun point d'inflexion, il s'ensuit que, la chose étant convenablement envisagée, le pendule nous offre, au contraire, un des exemples les plus simples dans lesquels la figure d'équilibre *douteuse* n'existe pas.

Remarque V. Disons brièvement ce que nous nommons, pour abréger le langage, un poids équivalent à une force donnée qui agit d'après un mode connu sur une machine : tangentiellement à la ligne d'action de la force on peut placer une poulie de renvoi, faire passer suivant cette ligne même un cordon parfaitement flexible et inexten-

sible d'une longueur définie, et enfin suspendre à son extrémité un poids capable d'exercer le long du cordon et sur la machine un effort égal à la force; c'est son poids équivalent. Or, si pour chaque figure de la machine on dispose toujours les poulies de la même manière par rapport aux points d'application des forces, et que l'on emploie constamment les mêmes longueurs de cordon, l'ensemble des poids équivalents aura un centre de gravité, et les positions de ce centre seront sur une même courbe continue, si toutefois les forces données sont elles-mêmes constantes ou qu'elles ne varient que par degrés insensibles dans leurs intensités et dans leurs lignes de direction.

Remarque VI. La question de la détermination des figures et des positions d'équilibre n'est ni sans difficulté ni sans importance dans la mécanique rationnelle, et surtout dans la mécanique appliquée. En effet, dès que l'on connaît la figure stable et instable qui succède, on en déduit immédiatement l'équation de condition qui fait connaître le poids et la masse du volant destiné à régulariser le mouvement général à un degré donné. Navier et M. Poncelet ont les premiers fait connaître cette méthode par quelques beaux exemples; mais nous ne sachions pas que l'on ait encore traité la question suivante que nous n'avons réussi à résoudre que d'une manière peu approchée, et dont voici l'énoncé : On sait que la machine à vapeur fixe de Watt a à peu près des dimensions constantes bien connues; on demande de déterminer, eu égard à ces proportions, les diverses figures d'équilibre de la machine, en négligeant ou en tenant compte du poids du balancier et de sa masse, et en laissant du même côté les résistances passives. Ces figures étant trouvées d'une manière au moins très-approchée, calculer le poids ou la masse du volant destiné à régulariser le mouvement à un degré donné. Nous devons faire remarquer que les procédés graphiques indiqués par M. Poncelet dans son Cours de machines de Metz, et qui sont fondés sur un beau théorème de MM. Chasles et Bobillier, résolvent aussi la question d'une manière approchée. On pourrait se proposer aussi de déterminer les positions d'équilibre d'une ellipse homogène pesante, qui serait placée entre deux plans inclinés, se coupant suivant une droite horizontale.

Bruxelles, 21 janvier 1848.

SUR UN CAS REMARQUABLE DE TAUTOCHRONISME;

PAR M. J. BERTRAND.

Tous les géomètres connaissent la double propriété dont jouit la cycloïde d'être tautochrone soit dans le cas du mouvement d'un point matériel pesant, soit encore lorsqu'on suppose une résistance proportionnelle à la vitesse. Dans le tome IV, page 176 des *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences par des Savants étrangers,* on trouve un Mémoire de M. Necker dans lequel est indiqué un troisième cas de tautochronisme de la cycloïde, dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle au frottement, ou, en d'autres termes, à la pression que supporte la courbe. Dans ce cas seulement, le point auquel les mobiles pesants parviennent tous dans le même temps n'est pas le point le plus bas de la courbe, mais le plus élevé de ceux où un point matériel posé sans vitesse pourrait rester en équilibre. Ce théorème très-remarquable étant resté à peu près ignoré, et le Mémoire dans lequel il se trouve consigné renfermant d'ailleurs quelques inexactitudes, il ne sera pas inutile d'en donner ici une démonstration nouvelle.

D'après une formule de Lagrange, dont j'ai récemment donné la démonstration dans ce Journal, il y aura tautochronisme dans un mouvement quelconque, si la force s'exprime au moyen de la vitesse v et de l'arc ρ qui reste à parcourir par la formule suivante :

$$(1) \qquad F = v^2 \left[\frac{\varpi\left(\frac{\rho}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{d\rho} \right] \text{ [*]},$$

ϖ étant une fonction quelconque et ξ une fonction quelconque aussi de la seule variable ρ. J'ajouterai (ce que je n'ai pas dit dans l'article où cette formule est démontrée) qu'il faut nécessairement supposer que, pour $\rho = 0$ et $v = 0$, on trouve $F = 0$.

---

[*] Une faute d'impression s'est glissée dans la Note où cette formule est démontrée (tome XII de ce Journal, page 126). On doit trouver

$$(3) \qquad F = v_1^2 \left[-\frac{\varpi\left(\frac{u}{\xi}\right)}{\xi} + \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du} \right],$$

résultat qui coïncide (à la notation près) avec la formule que nous employons ici, si l'on change le signe de la fonction arbitraire ϖ et si l'on remarque, en outre, que, dans la formule de Lagrange, les forces positives sont supposées tendre à diminuer la valeur de u, tandis que, dans nos calculs, l'hypothèse contraire a été faite implicitement.

Or, en supposant qu'un point matériel pesant descende sur la cycloïde en éprouvant une résistance proportionnelle au frottement, la force qui le sollicite a, comme il est facile de le voir, une composante tangentielle représentée par la formule

$$(2)\qquad \frac{g(\rho+\alpha)}{4a}-fg\sqrt{1-\frac{(\rho+\alpha)^2}{16a^2}}-\frac{fv^2}{\sqrt{16a^2-(\rho+\alpha)^2}}=\mathrm{F},$$

a désignant le rayon du cercle générateur, f le coefficient de frottement et α la distance de l'origine des arcs au point le plus bas de la cycloïde. Or je dis qu'on peut déterminer les fonctions arbitraires ϖ et ξ de manière à faire coïncider les formules (1) et (2).

Posons, en effet,

$$\xi=\frac{g(\rho+\alpha)}{4a}-fg\sqrt{1-\frac{(\rho+\alpha)^2}{16a^2}},$$

on trouve

$$\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{d\rho}=\frac{g(1-af^2)}{4a\xi}-\frac{f}{\sqrt{16a^2-(\rho+\alpha)^2}},$$

et la formule (1) devient

$$\mathrm{F}=\frac{v^2}{\xi}\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right)-\frac{v^2g(1-af^2)}{4a\xi}-\frac{fv^2}{\sqrt{16a^2-(\rho+\alpha)^2}},$$

ce qui coïncide avec la formule (1) si on suppose

$$\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right)=\frac{\xi^2}{v^2}+\frac{g(1-af^2)}{4a}.$$

La quantité α, qui jusqu'ici reste arbitraire, se déterminera par la condition qu'un mobile placé sans vitesse au point d'arrivée y reste en équilibre, ce qui exige que la tangente de la courbe ait une inclinaison sur l'horizon précisément égale à l'angle de frottement.

D'après une remarque faite par Lagrange et qui s'applique à tous les cas où l'on peut employer sa formule, le tautochronisme subsisterait encore si la force qui produit le mouvement était augmentée d'un terme proportionnel à la vitesse.

La cycloïde est donc tautochrone pour le cas d'un point matériel pesant qui éprouve une résistance proportionnelle à la vitesse et un frottement proportionnel à la pression exercée sur la courbe.

Il est digne de remarque que la formule de Lagrange, quoique n'ayant pas, à beaucoup près, le degré de généralité qu'on lui supposait, s'applique néanmoins à tous les cas connus de tautochronisme.

NOTICE

SUR LES SYSTÈMES DE NUMÉRATION NATURELS QUINAIRE, DÉNAIRE, VIGÉNAIRE;

PAR M. A. MARRE,

Inspecteur de l'Instruction primaire.

(Extrait en grande partie d'un Mémoire de M. ALEX. DE HUMBOLDT.)

Le nombre *douze* serait incontestablement la base la plus convenable de tout système de numération; pourquoi a-t-on, je ne dirai pas préféré, mais adopté de prime abord le système dénaire, ou le quinaire, ou encore le vigénaire? C'est que la nature nous a pourvus d'une sorte d'instrument arithmétique, la main, dont l'usage est plus étendu qu'on ne le pense ordinairement. Tout nous prouve que ce fut le premier moyen dont les hommes se servirent pour la pratique de la numération. Dans Homère, on voit Protée compter cinq à cinq, c'est-à-dire par ses doigts, les veaux marins dont il était le conducteur. Homère se sert dans ce passage de *penpadzeïn*, qui, suivant son étymologie, signifie *assembler par cinq* ou *cinq à cinq*. Plutarque et plusieurs lexicographes nous apprennent que, dans l'origine de la langue grecque, il n'y avait pas d'autre terme pour signifier *compter, calculer*. Ce mot voulait dire alors ce qu'on a exprimé depuis par le terme *arithmeïn*.

Le groupe de *dix* en particulier a toujours été d'un usage presque universel; pourquoi? *Quia tot digiti per quos numerare solemus*, répond Ovide. Ainsi l'homme, avec des extrémités sexdigitaires, serait parvenu aux groupes de 6, 12, à l'échelle duodécimale.

Lorsqu'on remonte au premier âge de la civilisation, il faut se rappeler l'origine des choses dont souvent on dédaigne de s'occuper, à cause de leur extrême simplicité. Pour compter 17 sur les doigts de la main, on est obligé de fixer son attention sur le nombre de fois qu'on a passé la main entière. D'après le système de Protée, c'est-à-dire d'après le système quinaire, on aura 2 unités plus 3 fois 5; si le nombre est plus grand, on pourra plier un doigt de la main droite chaque fois qu'on aura passé tous les doigts de la main gauche. On comptera de cette manière sur une main les groupes de 5 ou de 10 quand l'autre main indiquera les unités.

On a vu des voyageurs soutenir que beaucoup de peuples ne comptaient pas au delà de 5 ou de 20, parce que chez ces peuples, pour compter, on rassemblait des petites pierres et des grains de blé en monceaux de 5 ou de 20; pourquoi ne pas soutenir que les nations de l'Europe moderne les plus avancées dans les sciences ne comptent pas au delà de 10? Pour 17, par exemple, ne disent-elles pas 10 et 7 ou 7 et 10?

Dans tous les temps, sur tous les points du globe terrestre, on a senti que les groupes d'unités assurent des pauses, des repos, pour compter. Les peuples les plus différents, en raison de la membrure identique de chaque individu de la grande famille humaine (4 extrémités 5 fois divisées), s'arrêtent soit à une main, soit aux deux, ou bien encore aux mains et aux pieds. D'après cette variété de points d'arrêt, se forment les groupes de 5, 10, 15 et 20.

Dans l'ancien continent on trouve plus généralement le groupe fondamental de 10; dans le nouveau continent celui de 20 unités: cependant, chose singulière! les Mexicains *comptaient* d'après une méthode très-régulière par groupe de 10, tandis qu'ils écrivaient par vingtaines et par les puissances de 20 [*]. Chez les *Guaranis*, les groupes nor-

---

[*] Chez les Mexicains, les hiéroglyphes simples étaient pour le premier groupe 20, un drapeau; pour le carré de 20 ou 400, une plume remplie de grains d'or, lesquels servaient comme monnaie dans certaines provinces du Mexique; pour le cube de 20 ou 8000, un petit sac, *xiquipilli*, avec 8000 fèves de cacao pareillement destinées au trafic par échange.

maux 5, 10, 20 sont appelés *une main, deux mains, mains et pieds.* Dans la langue des *Yarouros,* peuplade riveraine de l'*Apoure,* 40 s'exprime par *noeni poume* (deux hommes), de *noeni* deux et *poume* hommes; et, en effet, les doigts des pieds et des mains, des quatre extrémités, étant comptés, l'homme tout entier apparaît comme un symbole de 20.

En persan, le poing fermé se dit *pentcha,* de *pend* cinq, provenant du mot sanscrit *pancha.* Ce dernier terme, d'après l'ingénieuse remarque de M. Bopp [*], a engendré le *quinque* romain. Ainsi, le mot français *cinq,* l'italien, l'espagnol *cinco,* etc., dérivés du mot latin, remontent à une source étymologique qui prouve l'usage de l'instrument arithmétique naturel, de la main. A *Java,* où l'influence de l'Inde a dominé, on dit dans le langage de cour *chatour* et *poncho* pour 4 et 5. Dans le javanais vulgaire de même que dans le malais, le bouggui, le tagala, le bisaya, et dans presque tous les idiomes du monde maritime, le mot *Lima* signifie *cinq,* et chez la plupart de ces peuples il signifie encore main.

Dans la langue des anciens Goths, 70 se dit *sibun-têhund,* 80 ahtaù-tèhund, 90 niun-têhund, 100 taihan-tèhund, 200 tva-hunda, etc. La ressemblance du mot *hund* avec le mot *hand* main est frappante. *Tva-hunda* signifiant 200 devait avoir une autre finale que le mot goth adopté pour 100, comme en latin *centum,* du *centi.* Dans *taihun* ou *têhund* on pourrait reconnaître tvai-hund, deux mains, allemand zwei händ, anglais two hands, hollandais twee handen: de là sibun-tèhund, 70 ou 7 fois 2 mains; ahtan-tèhund, 80 ou 8 fois 2 mains,..., tai-hun tèhund ($10 \times 10 = 100 = 2$ mains fois 2 mains).

Le système quinaire fut en vigueur chez beaucoup de peuples. A Rome, on employa le système quinaire: les nombres écrits IV, V, VI, VII, VIII ne le prouvent-ils pas suffisamment? Ne sait-on pas encore

---

[*] Le *ch* sanscrit prononcé comme en anglais, c'est-à-dire *tch,* devient le *t* grec; de là *panta* pour pan*ch*a, de là penté, l'éolien pempé et le verbe pempadzeïn. En latin, au contraire, *qu* répond au sanscrit *ch* ou plutôt *tch,* d'où *quinque* et *quatuor* pour pan*ch*a et *ch*atour.

que dans l'Abacus romain, à côté de chaque cordon représentant les groupes n, n^2, n^3,..., il existait un cordon plus petit dont une boule valait 5 de celles de son annexe? Les Aztèques admettaient 5 âges du monde et ils avaient une semaine composée de 5 jours. Les Scandinaves aussi avaient une semaine de 5 jours et divisaient, comme les Perses, le jour en 5 parties. En zend, les traces du système quinaire ont été découvertes par Anquetil-Duperron.

En ouolof, les mots *benne, niare, niatte, nianette, dhiouroun* signifient 1, 2, 3, 4, 5; puis les mots *dhiouroun benne, dhiouroun niare, dhiouroun niatte,* etc. (5 et 1, 5 et 2, 5 et 3, etc.) signifient 6, 7, 8, etc. En Afrique encore, dans la langue foulah ou fellah, les nombres de 6 à 9 se forment par l'addition des quatre premiers avec 5: *gui-e-gom* (5 et 1); gui-e-didi (5 et 2), gui-e-tati (5 et 3); gui-e-nai (5 et 4). De cette combinaison, qui existe chez beaucoup de peuples africains, on n'aperçoit que de faibles vestiges dans les dialectes de l'archipel Indien; toutefois M. Gustave d'Eichthal a remarqué que la série des nombres foulahs offrait des affinités nombreuses et certaines avec la série polynésienne, série décimale qu'on trouve en usage depuis le Japon jusqu'à Madagascar.

M. Duponceau, le savant franco-américain, a observé que dans la plupart des langues de l'Amérique septentrionale, le mot *six* est formé du mot *un* auquel on ajoute une désinence et quelquefois une syllabe préfixe; le mot *sept* est formé du mot *deux* qui est son excès sur *cinq*; mais ce n'est pas toujours de leur propre langue que les Indiens du nouveau continent empruntent le mot *deux* dont ils forment le mot *sept*. Le nombre *trois* est incorporé dans le mot qui signifie *huit*, et dans quelques dialectes seulement on rencontre *quatre* dans le nombre *neuf;* le plus généralement c'est *un*.

Dans la langue *chibcha* des Muyscas (habitants du plateau de Candinamarca qui avaient, comme les Japonais et les Thibétains, un chef spirituel et un chef temporel), 11, 12, 13 se disent: pied-un, pied-deux, pied-trois, quihieha āta, quihieha bosa, huihieha mica, de quihieha (pied) et des trois premiers nombres āta, bozha ou bosa, et mica. Le mot numéral *pied* signifie *dix,* parce qu'on nomme le pied

quand déjà les deux mains sont comptées. Vingt s'appelle, dans le système de langage des Muyscas, *pied-dix* ou maisonnette (gue'ta), peut-être, dit M. Alex. de Humboldt, parce qu'on comptait avec des grains de maïs au lieu de petites pierres, et un petit monceau de maïs, ajoute-t-il, rappelle le magasin, la grange au maïs [*]. Du mot *gue'ta* ou vingt dérivent 30, 40, 80, qui se dénomment vingt et dix [**], deux vingt, quatre vingt, absolument comme les expressions celtiques passées dans les langues romanes, quatre vingt, six vingt, sept vingt, huit vingt, quinze vingt. Deux et trois vingt ne se trouvent pas en français; mais dans les dialectes galliques ou celtiques de la Bretagne occidentale, l'on dit *ugent* vingt, *daou ugent* deux vingt ou 40, *tri-ugent* trois vingt ou 60, et même *deh ha nao ugent* pour 190 ou dix au-dessus de neuf vingt. Ce groupe fondamental de 20 unités se retrouve encore dans d'autres parties de l'ancien monde, par exemple chez les Basques, chez les peuples du Caucase et chez les Mindingues.

Dans le *Souga Siddh'anta,* l'un des plus fameux ouvrages astronomiques des Hindous, on lit ce passage traduit littéralement par l'illustre Colebrooke : « Le cercle des constellations se meut vers l'orient » *trente vingt* en un youga, etc.... » De ce simple fragment du *Souga Siddh'anta,* nous tirons cette conséquence, que pour 600 les Hindous disaient encore *trente vingt,* absolument comme dans les langues celtiques on disait *quinze vingt* pour 300. Oserai-je, comme induction,

---

[*] Il me semble qu'un monceau de petites pierres fait naître assez nettement l'idée de maisonnette sans qu'il soit besoin d'attribuer ce nom numéral à l'usage des grains de maïs. D'ailleurs les Indiens, en employant les grains de maïs pour leurs calculs, n'en faisaient point de petits tas, mais bien des *quippos* ou *quippo-camagos;* et Acosta, dans son *Historia natural de las Indias,* liv. VI, chap. 2, nous apprend avec quelle habileté ils s'en servaient. « Ils se mettent plutôt à la raison par ces *quippos* » sur ce que chacun doit payer dans la répartition des impôts, que nous ne pourrions » faire, nous, avec la plume. Par cela on peut juger s'ils ont de l'entendement et si ces » hommes sont bêtes. Quant à moi, je tiens pour certain qu'ils nous surpassent dans » les choses où ils s'appliquent. »

[**] Dans le pays de Galles : *deg or ugain,* dix et vingt.

avancer que dans l'Inde on a connu le système vigénaire et rapprocher encore par ce trait de ressemblance des langues qui ont d'ailleurs tant d'affinité, les langues celtiques et le sanscrit. Il est un préjugé généralement répandu, c'est que, dans l'Inde, on trouve seulement des chiffres et non des lettres employées comme chiffres. Bien plus: il en est qui pensent que le système exclusif, unique, de l'Inde est le système avec valeur de position de dix chiffres parmi lesquels le zéro. Oui, nous aussi, malgré les travaux du savant géomètre M. Chasles, qui tendent à prouver le contraire, nous croyons devoir attribuer aux Hindous et non pas aux Grecs ou aux Romains le système de numération écrite que nous ont transmis les Arabes; mais, avec M. Alex. de Humboldt, nous reconnaissons dans l'Inde les traces de beaucoup de systèmes de numération différents, avec ou sans valeur de position, avec des chiffres ou des lettres, etc. [*].

Ces divers systèmes ont-ils été contemporains, ou bien ont-ils paru à des époques différentes; n'ont-ils point été les produits de contrées distinctes, bien que rassemblées sous une même désignation? Au mot *Indien*, en effet, reste toujours attaché un certain vague; la dénomination d'Indien est attribuée non à un peuple isolé, compacte, indivisible, mais à une foule de peuples qui n'ont d'autre lien que celui de la juxtaposition. Je serais presque tenté de dire que dans l'Inde, cette

---

[*] Chez les Grecs et chez les Romains aussi, il y eut différents systèmes de numération. Archimède et Apollonius simplifièrent les systèmes de numération des Grecs, et l'exemple que cite Cumberland dans son *Traité des Poids et Mesures de l'Écriture*, prouve assez l'absence de toute idée de valeur de position : « Herodian informs us the » Grecks anciently wrote 34, putting three *delta* for 30, be cause each Δ stood for *déca* » or ten, bieng the first letter of that word and each I for single units. » Ainsi 34 aurait été écrit anciennement par les Grecs ΔΔΔIIII. Chez les anciens Grecs et Romains, on ne trouve, que je sache, aucun caractère analogue à notre zéro et en faisant fonction. Aussi chez eux le germe de la méthode hindoue ne put être transplanté du domaine de l'arithmétique *palpable* dans le domaine de l'arithmétique *graphique*. Les Hindous ont possédé le zéro, comme chacun sait, et notre mot *chiffre* lui-même, bien improprement choisi, témoigne de cette vérité. Le mot arabe *sifr* signifie vide et n'est que la traduction du zéro sanscrit, sounga (vide). Le nom *sipher* s'est maintenu dans la langue anglaise pour marquer le zéro, et c'était là sa signification.

terre minière des sciences, il y a eu place pour tous les systèmes de numération, comme M. Cousin l'a dit pour tous les systèmes de philosophie.

Le système décimal dans la numération parlée a été employé dans tous les temps et chez presque tous les peuples de la terre, les Coptes, les Juifs, les Grecs, les Romains, les Indiens, les Chinois, les Japonais, les Arabes, les Goths, les Polynésiens, etc. Manou, que l'on suppose avoir fleuri dans le IXe siècle avant Jésus-Christ, se sert seulement de la division décimale quand il traite de l'administration civile. Dans une tradition très-ancienne, rapportée par Soyoutî sur la foi de Tabrisî, les Arabes, bien longtemps avant Mohammed et l'islamisme, avaient une formule consacrée par l'usage pour exprimer une clientèle nombreuse; ils disaient : « Je suis père de dix, frère de dix, oncle » de dix, » ce qui signifiait : Mes nombreux amis m'environnent comme d'une armée. Chez les Chinois, le mot *ouan* (dix mille) est pris dans un sens indéterminé pour multitude, foule, grand nombre. Francis Davis traduit ce mot par *mang*. D'après M. de Paravey, la forme antique chinoise ouan est le nom de la reine abeille et du pavot, et, par suite aussi du nombre suprême *dix mille*, la ruche étant censée contenir dix mille abeilles, et le pavot dix mille grains. Nous ajouterons comme rapprochement curieux que dans son Arénaire, Archimède trouva, d'après des mesures comparées, qu'un grain de pavot a un diamètre moindre que $\frac{1}{40}$ de doigt ou $0^{m},000468$, et que ce même grain de pavot équivaut à 10000 grains de sable. Le grain de sable étant pris pour unité, le grain de pavot serait égal à 10000.

Quant aux Hindous, il y a chez eux un luxe de noms de nombres sans exemple dans toute autre langue ancienne ou moderne, luxe qui implique une habitude excessive de la classification décimale des nombres. Pour n'en citer qu'une preuve, le nom de adant-singhar est celui du plus petit nombre de 40 chiffres ou de l'unité suivie de 39 zéros.

Il est un fait remarquable que nous ne pouvons passer sous silence. Deux mots malais *blas* et *pouloh* se traduisent par dix. Voici ce qui les distingue : *blas* ne s'emploie que depuis 11 jusqu'à 19 inclusive-

ment. En dehors de ces limites, c'est toujours *pouloh* qui figure :

Sa-blas,	doua-blas,	tiga-blas,......,	sambilan-blas,
$1+10=11$,	$2+10=12$,	$3+10=13,\ldots,$	$9+10=19$,
Sa-pouloh,	doua-pouloh,	tiga-pouloh,.....,	sambilan-pouloh,
Un dix ou 10,	deux dix ou 20,	trois dix ou 30,...,	neuf dix ou 90.

Ainsi les neuf premiers nombres placés devant *blas* (10) sont additifs; ils deviennent multiplicatifs ou coefficients devant *pouloh*.

Chez les Goths, le fait est analogue; ainsi pour exprimer 11, 12,... dans leur langue, on dit ain-lif, tva-lif,.... L'incorporation des mots *un* et *deux* dans ces noms de nombres est évidente. *Lif* remplace le mot malais *blas;* la signification propre de ces deux mots est également inconnue : au *pouloh* malais correspondent *tigus* jusqu'à 5 dix ou 50, et tèhund (deux mains?) pour le reste.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE STATIQUE;

PAR M. C. JOUBERT,
Élève de l'École Normale.

Avant de donner l'énoncé de ce théorème, j'en rappellerai un autre qui m'y a conduit, et que voici :

« Quand on applique à tous les éléments d'une surface fermée quel-
» conque des forces normales proportionnelles au produit $d\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)$,
» $d\sigma$ désignant la surface de l'élément auquel la force est appliquée, R
» et r les rayons de courbure principaux de la surface, toutes ces
» forces se font équilibre. »

Pour le démontrer, souvenons-nous d'abord que des forces appliquées à tous les éléments d'une surface fermée quelconque, dirigées suivant la normale, et proportionnelles aux surfaces de ces éléments, se font équilibre.

Cela posé, considérons sur la surface proposée un élément $d\sigma$, auquel nous appliquons une force $Pd\sigma$, P désignant un facteur constant. Si, par les différents points de la surface, nous menons les normales, et si nous prolongeons chacune d'elles vers l'extérieur d'une même longueur ds, le lieu de ces extrémités sera une seconde surface ayant les mêmes normales que la proposée. A l'élément $d\sigma$ de la première surface correspondra sur la seconde un élément $d\sigma'$, déterminé par l'intersection avec cette dernière des différentes normales menées par les points de contour de l'élément $d\sigma$. Appliquons de même à l'élément $d\sigma'$ une force normale $Pd\sigma'$, mais contraire à la force $Pd\sigma$. Nous faisons la même chose pour tous les éléments des deux surfaces.

Toutes les forces appliquées à la première surface se feront équilibre, d'après le théorème cité en commençant : il en sera de même des forces appliquées à la seconde. Si nous composons ces forces entre

elles, leurs résultantes se feront encore équilibre. Or les deux forces $Pd\sigma'$ et $Pd\sigma$ donnent une résultante égale à leur différence $P(d\sigma' - d\sigma)$, que nous pouvons supposer appliquée à l'élément $d\sigma$ et dirigée suivant la normale. Nous faisons la même chose pour tous les éléments correspondants des deux surfaces; et les forces $P(d\sigma' - d\sigma)$, appliquées à la première, se feront équilibre.

Or il résulte d'une formule démontrée par M. Bertrand, dans un Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales, que la différence $d\sigma' - d\sigma$ des deux éléments correspondants peut se mettre sous la forme $d\sigma ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)$. La démonstration de cette formule y est présentée à peu près dans les termes suivants :

Quelque petit que soit l'élément $d\sigma$, nous pouvons toujours le concevoir décomposé en une infinité de rectangles infiniment petits par rapport à lui-même. Supposons ces rectangles déterminés par les lignes de courbure; les deux surfaces ayant les mêmes normales, les lignes de courbure se correspondent, et à chaque rectangle ABCD, formé par quatre lignes de courbure sur la première surface, correspondra un rectangle A'B'C'D' sur la seconde. Posons

$$AB = \alpha, \qquad AC = \beta,$$
$$A'B' = \alpha + d\alpha, \quad A'C' = \beta + d\beta.$$

Les droites A'A, B'B sont normales à la première surface, et vont se rencontrer en un point O à une distance R du point A et $R + ds$ du point A'. Nous aurons donc, dans le triangle A'B'O,

$$\alpha + d\alpha : \alpha :: R + ds : R,$$

donc

$$d\alpha = \frac{\alpha ds}{R};$$

et, de même,

$$d\beta = \frac{\beta ds}{r},$$

et, par suite, le rectangle A'B'C'D' sera

$$(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta) = \alpha\beta\left(1 + \frac{ds}{R} + \frac{ds}{r}\right).$$

Ainsi donc, en passant de la première surface à la seconde, les rectangles augmentent proportionnellement à la somme $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}$: il en sera donc de même des éléments correspondants, et nous aurons

$$d\sigma' - d\sigma = d\sigma ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right).$$

En remplaçant $d\sigma' - d\sigma$ par cette valeur dans l'expression de la force appliquée à l'élément $d\sigma$, nous voyons que des forces $Pd\sigma ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)$, appliquées à tous les éléments de la première surface, se font équilibre, et ces forces sont précisément proportionnelles au produit $d\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)$, de sorte que le théorème énoncé se trouve démontré [*].

Le théorème, bien connu du reste, dont je viens d'indiquer une démonstration nouvelle, telle qu'elle a été donnée par M. Bertrand dans ses Conférences à l'École Normale, m'a conduit au suivant:

« Si l'on applique à tous les éléments d'une surface fermée des forces » normales proportionnelles à l'expression $\frac{d\sigma}{Rr}$, $d\sigma$ désignant toujours » la surface de l'élément, R et r les deux rayons de courbure de la » surface, toutes ces forces se font équilibre. »

Considérons toujours les deux surfaces dont il a été question dans la démonstration du théorème précédent; appliquons à l'élément $d\sigma$ de la première surface une force normale représentée par

$$Pd\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right),$$

et à l'élément correspondant de la seconde, une force

$$Pd\sigma'\left(\frac{1}{R+ds}+\frac{1}{r+ds}\right),$$

normale, mais contraire à la précédente. Faisons la même chose pour tous les éléments correspondants des deux surfaces.

---

[*] Une démonstration analogue prouverait que des forces appliquées à tous les éléments d'une courbe plane fermée, dirigées suivant la normale et proportionnelles à $\frac{ds}{\rho}$ (ds désignant l'élément de l'arc et ρ le rayon de courbure), se font équilibre.

D'après le théorème précédent, les forces appliquées à la première surface se font équilibre, et, en faisant attention que $R + ds$ et $r + ds$ sont les rayons principaux de la seconde surface, nous voyons qu'il en est de même des forces appliquées à cette dernière. Si nous composons ces forces entre elles, leurs résultantes se feront encore équilibre : or les deux forces $Pd\sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)$ et $Pd\sigma'\left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds}\right)$, composées entre elles, donnent une résultante égale à leur différence

$$Pd\sigma'\left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds}\right) - Pd\sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right);$$

en remplaçant $d\sigma'$ par sa valeur

$$d\sigma + d\sigma ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

cette différence devient

$$Pd\sigma\left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds} - \frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) + Pd\sigma ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds}\right).$$

Réduisant et négligeant les quantités infiniment petites du quatrième ordre, l'expression de cette force deviendra

$$2Pd\sigma ds\frac{1}{Rr}.$$

Cette force $2Pd\sigma ds\frac{1}{Rr}$ peut être considérée comme appliquée à l'élément $d\sigma$ de la première surface. Nous pouvons faire la même chose pour tous les éléments correspondants des deux surfaces. Ainsi donc les forces $2Pd\sigma ds\frac{1}{Rr}$, appliquées à tous les éléments de la première surface, se font équilibre, et ces forces sont proportionnelles à $\frac{d\sigma}{Rr}$: le théorème énoncé se trouve donc démontré.

DÉMONSTRATION

D'un théorème de M. Boole concernant des intégrales multiples;

PAR M. A. CAYLEY.

THÉORÈME. « Soient P, Q des fonctions de n variables $x, y,\ldots$;
» lesquelles fonctions satisfassent à la condition

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\ldots dx\,dy\ldots e^{-(Pv+Qw)i} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}e^{-\frac{n\pi i}{4}}e^{-G(v,w)i}}{\sqrt{H(v,w)}},$$

» où, comme à l'ordinaire, $i=\sqrt{-1}$; $G(v,w)$, $H(v,w)$ sont des
» fonctions homogènes de v, w des ordres 1 et n respectivement (on
» verra, dans la suite, qu'il y a plusieurs fonctions P, Q qui satisfont
» à une équation de cette forme).

» Cela étant, posons

$$(2)\qquad V=\int\ldots dx\,dy\ldots\frac{f(P)}{Q^{\frac{1}{2}n+q}},$$

» les limites de l'intégration étant données par la condition $P=1$;
» et soient

$$(3)\qquad G\left(1,\frac{1}{s}\right)=\sigma,\quad H\left(1,\frac{1}{s}\right)=s^{-n}\varphi.$$

» On aura pour l'intégrale V cette formule,

$$(4)\qquad V=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+q\right)}\int_0^{\infty}\frac{Ss^{-q-1}\,ds}{\sqrt{\varphi}},$$

» dans laquelle

$$(5)\qquad S=\frac{(1-\sigma)^{-q}}{\Gamma(-q)}\int_0^1 t^{-q-1}f[\sigma+t(1-\sigma)]\,dt.\text{ »}$$

Ce théorème remarquable est dû à M. Boole, qui me l'a communiqué sous une forme un peu différente [*] en me priant d'y suppléer la démonstration et d'en faire part aux géomètres; il ne m'a fallu, pour le prouver, que modifier un peu le procédé dont s'est servi M. Boole même, dans son Mémoire : « Researches in the integral calculus, » *Irish Transactions,* tome XXI.

Je vais donc reproduire cette démonstration en l'appliquant au problème dont il s'agit.

On démontre par une analyse semblable à peu près à celle par laquelle se démontre le théorème de Fourier, que l'expression

$$(6)\quad \frac{1}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}n+q\right)}\int_0^1 d\alpha\int_0^\infty dv\int^\infty dw\, e^{\left[(\alpha-\mathrm{P})v-\mathrm{Q}w+\left(\frac{1}{2}n+q\right)\frac{\pi}{2}\right]i}\ldots w^{\frac{1}{2}n+q-1}f\alpha$$

se réduit (en n'y faisant attention qu'à la partie réelle) à $\dfrac{f\mathrm{P}}{\mathrm{Q}^{\frac{1}{2}n+q}}$ ou à zéro, selon que la quantité P se trouve ou ne se trouve pas comprise entre les limites 0, 1. Donc, en substituant cette intégrale triple dans l'expression de V, on peut étendre depuis $-\infty$ jusqu'à ∞ les intégrations par rapport aux variables $x, y, \ldots$. De cette manière, et en réduisant par l'équation (1), on obtient tout de suite

$$(7)\quad \mathrm{V} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n-1}e^{\frac{1}{2}q\pi i}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+q\right)}\int_0^1 d\alpha\int_0^\infty dv\int_0^\infty dw\,\frac{e^{[\alpha v-\mathrm{G}(v,w)]i}\ldots w^{\frac{1}{2}n+q-1}}{\sqrt{\mathrm{H}(v,w)}}f\alpha.$$

Donc, en écrivant

$$w = \frac{v}{s}, \qquad dw = -\frac{v\,ds}{s^2}$$

[ce qui donne, par les équations (3),

$$\mathrm{G}(v,w) = v\sigma, \quad \mathrm{H}(v,w) = v^n s^{-n}\varphi],$$

---

[*] M. Boole écrit

$$\mathrm{S} = \left(-\frac{d}{d\sigma}\right)^q f\sigma,$$

expression à la vérité plus simple, mais qui donne lieu, ce me semble, à quelques difficultés.

les limites par rapport à la nouvelle variable s seront ∞, o, et l'on obtiendra, en changeant l'ordre des intégrations,

(8) $$V = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+q)} \int_0^\infty ds \frac{Ss^{-q-1}}{\sqrt{q}},$$

dans laquelle expression

(9) $$S = \frac{1}{\pi} e^{\frac{1}{2}q\pi i} \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty dv\, v^q e^{(\alpha-\sigma)vi} f\alpha;$$

et il ne s'agit plus que de faire voir l'identité de cette valeur avec celle qui est donnée par l'équation (5). Pour cela, je remarque que l'on aura

(10) $$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int_0^\infty dv\, v^q e^{(\alpha-\sigma)vi} = & \Gamma(q+1)\, e^{\frac{1}{2}(q+1)\pi i}(\alpha-\sigma)^{-q-1} \\ \text{ou} & \Gamma(q+1)\, e^{-\frac{1}{2}(q+1)\pi i}(\sigma-\alpha)^{-q-1}, \end{array}\right.$$

selon que $(\alpha-\sigma)$ est positif ou négatif; les valeurs correspondantes de $\frac{1}{\pi} e^{\frac{1}{2}q\pi i} \int_0^\infty dv\, v^q e^{(\alpha-\sigma)vi}$ sont

(11) $$\frac{1}{\pi} e^{(q+\frac{1}{2})\pi i}\Gamma(q+1)(\alpha-\sigma)^{-q-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\pi i}\Gamma(q+1)(\sigma-\alpha)^{-q-1};$$

or, en ne faisant attention qu'aux parties réelles, et en réduisant par une propriété connue des fonctions Γ, ces valeurs se réduisent à $\frac{1}{\Gamma(-q)}(\alpha-\sigma)^{-q-1}$ et zéro respectivement; d'après cela, l'équation (9) se réduit à

(12) $$S = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_\sigma^1 (\alpha-\sigma)^{-q-1} f\alpha\, d\alpha,$$

et enfin, en écrivant

$$\alpha = \sigma + t(1-\sigma), \quad d\alpha = (1-\sigma)\,dt,$$

on obtient pour S la valeur donnée par l'équation (5), de manière que la formule dont il s'agit se trouve complétement démontrée.

Il paraît difficile de trouver les formes générales de P, Q [rien n'étant, je crois, connu sur la solution des équations telles que l'équa-

tion (1)]; mais des formes particulières se présentent assez facilement. Ainsi, en ne considérant que les exemples que m'a donnés M. Boole (lesquels j'ai depuis vérifiés), soit

$$(13)\qquad P = 2(lx + my + \ldots), \quad Q = v^2 + x^2 + y^2 + \ldots.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), les intégrations s'effectuent sans difficulté et sous la forme nécessaire, et l'on obtient

$$G(v, w) = wv^2 - \frac{(l^2 + m^2 + \ldots)v^2}{w}, \quad H(v, w) = w^n,$$

ou enfin

$$(14)\qquad \sigma = \frac{v^2}{s} - (l^2 + m^2 + \ldots)s, \quad \varphi = 1.$$

Soit encore (ce qui comprend comme cas particulier le problème des attractions)

$$(15)\qquad P = \frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} + \ldots, \quad Q = v^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2 + \ldots;$$

on obtient sans plus de difficulté

$$(16)\qquad \varphi = \frac{(s + f^2)(s + g^2)\ldots}{f^2 g^2}, \quad \sigma = \frac{v}{s} + \frac{a^2}{f^2 + s} + \frac{b^2}{g^2 + s}\ldots.$$

Soit encore, pour dernier exemple,

$$(17)\qquad P = l^2 x^2 + \frac{L^2}{x^2} + \ldots, \quad Q = v^2 + \lambda^2 x^2 + \frac{\Lambda^2}{x^2} + \ldots;$$

on aura, pour ce cas-ci,

$$(18)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = (l^2 s + \lambda^2)(L^2 s + \Lambda^2)\ldots, \\ \sigma = \frac{1}{s}\left[v^2 + 2\sqrt{(l^2 s + \lambda^2)(L^2 s + \Lambda^2)} + \ldots\right]. \end{array} \right.$$

Les formules qui se rapportent à cet exemple aussi bien qu'au premier sont, je crois, entièrement nouvelles.

DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE DE RÉVOLUTION

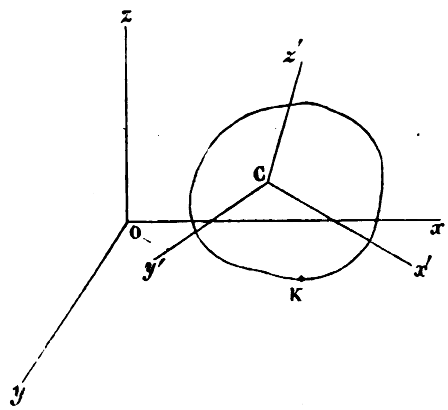
POSÉ SUR UN PLAN HORIZONTAL;

Par M. V. PUISEUX.

Imaginons qu'un solide de révolution homogène et pesant soit posé sur un plan horizontal, et qu'en même temps on lui donne une impulsion quelconque. En général, l'angle compris entre l'axe de figure et la verticale variera d'une quantité finie dans le cours du mouvement; mais quelle que soit la position primitive du corps, si on lui imprime autour de son axe une vitesse de rotation suffisamment grande, l'angle dont on vient de parler restera toujours aussi peu différent qu'on voudra de sa valeur initiale (on fait abstraction du frottement contre le plan et de la résistance de l'air).

La démonstration de ce théorème fait l'objet de cet article.

Considérons d'abord un corps de forme quelconque posé sur un plan horizontal que nous prendrons pour plan des x, y, et dirigeons l'axe des z en sens contraire de la pesanteur. Soient C le centre de



gravité du corps, K le point par où il touche le plan des x, y. Si

nous désignons sa masse par M, la résultante des actions de la pesanteur sera une force verticale Mg appliquée au point C; d'un autre côté, la résistance du plan sera une force verticale N, dirigée en sens contraire. Si donc nous appelons ξ, η, ζ les trois coordonnées du centre de gravité, nous aurons

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = N - Mg. \tag{1}$$

Soient Cx', Cy', Cz' les trois axes principaux du corps; nommons p, q, r les vitesses de rotation à l'époque t autour de chacun d'eux, A, B, C les moments principaux d'inertie. Désignons par φ et ψ les angles que fait avec Ox et Cz' la trace du plan $Cx'y'$ sur le plan Oxy, et par θ l'angle des deux axes Cz', Oz. Soient a'', b'', c'' les cosinus des angles que Cx', Cy', Cz' font avec Oz, et enfin appelons α, β, γ les coordonnées du point K par rapport aux axes Cx', Cy', Cz'.

On aura les équations connues:

$$a'' = \sin\psi \sin\theta, \quad b'' = \cos\psi \sin\theta, \quad c'' = \cos\theta; \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} p\,dt &= d\varphi \sin\psi \sin\theta + d\theta \cos\psi, \\ q\,dt &= d\varphi \cos\psi \sin\theta - d\theta \sin\psi, \\ r\,dt &= d\psi + d\varphi \cos\theta; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} A\,dp + (C - B)\,qr\,dt &= N(\beta c'' - \gamma b'')\,dt, \\ B\,dq + (A - C)\,pr\,dt &= N(\gamma a'' - \alpha c'')\,dt, \\ C\,dr + (B - A)\,pq\,dt &= N(\alpha b'' - \beta a'')\,dt. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Comme on a, pour le point K, $z = 0$, il en résulte, en vertu des formules de transformation des coordonnées,

$$\zeta + a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = 0. \tag{5}$$

Soit $L = 0$ l'équation entre α, β, γ qui représente la surface du corps rapportée aux axes principaux; les cosinus des angles que la normale au point K fait avec ces axes sont proportionnels à $\frac{dL}{d\alpha}$, $\frac{dL}{d\beta}$, $\frac{dL}{d\gamma}$, et comme cette normale est parallèle à Oz, on en conclut

$$\frac{1}{a''}\frac{dL}{d\alpha} = \frac{1}{b''}\frac{dL}{d\beta} = \frac{1}{c''}\frac{dL}{d\gamma}. \tag{6}$$

Au moyen de l'équation $L = 0$ et des équations (2) et (6), on pourra chasser a'', b'', c'', α, β, γ dans les équations (1), (3), (4) et (5). On aura ainsi dix équations différentielles pour déterminer en fonction du temps les dix variables ξ, ζ, η, φ, ψ, θ, p, q, r, N, et il est facile de s'assurer que les valeurs de ces variables devront renfermer dix constantes arbitraires.

On peut obtenir comme il suit deux intégrales de ces équations différentielles. Ajoutons les équations (4), après les avoir multipliées respectivement par p, q, r; il viendra

$$\begin{aligned} &Apdp + Bqdq + Crdr \\ &= N\left[\alpha(rb'' - qc'') + \beta(pc'' - ra'') + \gamma(qa'' - pb'')\right] dt; \end{aligned}$$

mais des équations (2) et (3) on conclut

$$(7)\quad (rb'' - qc'')\,dt = da'', \quad (pc'' - ra'')\,dt = db'', \quad (qa^2 - pb'')\,dt = dc'';$$

on a donc

$$Apdp + Bqdq + Crdr = N(\alpha da'' + \beta db'' + \gamma dc'').$$

Mais l'équation (5) nous donne

$$d\zeta + \alpha da'' + \beta db'' + \gamma dc'' + a''d\alpha + b''d\beta + c''d\gamma = 0;$$

or, à cause de l'équation $L = 0$, on a

$$\frac{dL}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{dL}{d\beta}\,d\beta + \frac{dL}{d\gamma}\,d\gamma = 0,$$

ou bien, en vertu des équations (6),

$$a''d\alpha + b''d\beta + c''d\gamma = 0;$$

par conséquent

$$d\zeta + \alpha da'' + \beta db'' + \gamma dc'' = 0,$$

ou bien

$$\alpha da'' + \beta db'' + \gamma dc'' = -\,d\zeta.$$

De plus, nous tirons de la troisième équation (1),

$$N = Mg + M\frac{d^2\zeta}{dt^2};$$

nous avons donc enfin

$$Ap\,dp + Bq\,dq + Cr\,dr + Mg\,d\zeta + M\frac{d\zeta\,d^2\zeta}{dt^2} = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$(8)\qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Mg\zeta + M\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = h,$$

h étant une constante.

Ajoutons encore les équations (4), après les avoir multipliées respectivement par a'', b'', c''; il viendra

$$\begin{aligned} A\,[a''dp + p\,(rb'' - qc'')\,dt] + B\,[b''dq + q\,(pc'' - ra'')\,dt] \\ + C\,[c''dr + r\,(qa'' - pb'')\,dt] = 0, \end{aligned}$$

ou bien, en vertu des formules (7),

$$A\,(a''dp + pda'') + B\,(b''dq + qdb'') + C\,(c''dr + rdc'') = 0.$$

Cette équation s'intègre immédiatement et nous donne

$$Apa'' + Bqb'' + Crc'' = l,$$

l étant une constante, ou bien

$$(9)\qquad Ap\sin\psi\sin\theta + Bq\cos\psi\sin\theta + Cr\cos\theta = l.$$

(Ces deux intégrales (8) et (9) sont données par Poisson dans son *Cours de Mécanique*, tome II, 2^e^ édition.)

Considérons maintenant en particulier le cas d'un solide de révolution homogène; l'un des axes principaux, Cz' par exemple, coïncidera avec l'axe de figure, et l'on aura $B = A$. De plus, L sera une fonction de $\alpha^2 + \beta^2$ et de γ, de sorte qu'on aura

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dL}{d\alpha} = \frac{1}{\beta}\frac{dL}{d\beta};$$

de cette équation, jointe aux relations (6), on conclut

$$\alpha b'' - \beta a'' = 0,$$

ce qu'on pouvait trouver encore en observant que la force N normale à la surface du corps rencontre l'axe de figure Cz', et qu'ainsi son moment par rapport à cet axe est zéro.

La troisième équation (4) se réduit donc à

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \text{d'où} \quad r = n,$$

n étant une constante. Les équations (8) et (9) deviennent alors

$$(10) \qquad A(p^2 + q^2) + 2Mg\zeta + M\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = h - Cn^2 = k,$$

$$(11) \quad A(p\sin\psi + q\cos\psi)\sin\theta + Cn(\cos\theta - \cos\theta_0) = l - Cn\cos\theta_0 = \lambda,$$

θ_0 désignant la valeur de θ pour $t = 0$, k et λ des constantes. Si l'on y remplace p et q par leurs valeurs tirées des formules (3), il vient

$$A\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2\theta + A\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2Mg\zeta + M\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = k,$$

$$A\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\theta + Cn(\cos\theta - \cos\theta_0) = \lambda;$$

d'où, en éliminant $\frac{d\varphi}{dt}$,

$$(12) \quad A\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + M\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = k - 2Mg\zeta - \frac{1}{A\sin\theta^2}[\lambda - Cn(\cos\theta - \cos\theta_0)]^2.$$

Avant de conclure de cette équation le théorème à démontrer, il y a quelques remarques à faire. Représentons par φ_0, ψ_0, p_0, etc., les valeurs initiales des variables φ, ψ, p, etc. : je dis qu'on peut se donner arbitrairement φ_0, ψ_0, θ_0, p_0, q_0, r_0 ou n, mais qu'alors ζ_0 et $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0$ sont déterminés. En effet, les quantités φ_0, ψ_0, θ_0 fixent la position du corps autour de son centre de gravité; mais il faut qu'il soit tangent au plan xy : cette condition détermine ζ_0, et même il est aisé de voir que ζ_0 ne dépend que de θ_0. Ensuite, les valeurs de p_0, q_0, n, jointes à celles de φ_0, ψ_0, θ_0, déterminent le mouvement du corps autour de son centre de gravité pendant le premier instant dt; et pendant ce même instant le déplacement de ce centre dans le sens vertical devra être tel, qu'à l'époque dt le corps soit encore tangent au plan xy : cette condition détermine la valeur de $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0$. Il faut même observer que $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0$ ne dépendra pas de n; car, le corps étant de révolution, la grandeur de sa

rotation autour de l'axe de figure n'aura aucune influence sur sa position à la fin de l'instant dt.

Ainsi on peut prendre pour six des constantes arbitraires les quantités φ_0, ψ_0, θ_0, p_0, q_0, n, et alors ζ_0 et $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0$ deviennent des fonctions des cinq premières, mais sont indépendantes de n. Il est clair d'ailleurs qu'on peut encore se donner à volonté ξ_0, η_0, $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0$, ce qui complète le nombre des dix constantes arbitraires que comporte la question.

On devra donc pouvoir exprimer au moyen de ces dix quantités toute autre constante introduite par l'intégration et, en particulier, celles désignées ci-dessus par k et λ; mais ce qu'il importe de remarquer, c'est que les expressions de k et de λ ne contiendront que φ_0, ψ_0, θ_0, p_0, q_0, et, par conséquent, ne dépendront pas de n. Pour nous en assurer, faisons $t = 0$ dans les équations (10) et (11); il viendra

$$k = \mathrm{A}(p_0^2 + q_0^2) + 2\mathrm{M}g\zeta_0 + \mathrm{M}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0^2,$$
$$\lambda = \mathrm{A}(p_0 \sin\psi_0 + q_0 \cos\psi_0)\sin\theta_0,$$

et comme ζ_0 et $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0$ ne dépendent pas de n, il en sera de même des seconds membres de ces équations.

Cela établi, l'équation (12), dont le premier membre est essentiellement positif, nous montre qu'on aura pendant tout le mouvement

$$k - 2\mathrm{M}g\zeta - \frac{1}{\mathrm{A}\sin^2\theta}[\lambda - \mathrm{C}n(\cos\theta - \cos\theta_0)]^2 > 0,$$

ou bien

$$[\lambda - \mathrm{C}n(\cos\theta - \cos\theta_0)]^2 < \mathrm{A}(k - 2\mathrm{M}g\zeta)\sin^2\theta,$$

ou encore

$$\lambda - \mathrm{C}n(\cos\theta - \cos\theta_0) < \sqrt{\mathrm{A}(k - 2\mathrm{M}g\zeta)\sin^2\theta},$$
$$\lambda - \mathrm{C}n(\cos\theta - \cos\theta_0) > -\sqrt{\mathrm{A}(k - 2\mathrm{M}g\zeta)\sin^2\theta}.$$

Il en résulte, en supposant, pour fixer les idées, que n soit positif,

$$\cos\theta - \cos\theta_0 > \frac{\lambda - \sqrt{\mathrm{A}(k - 2\mathrm{M}g\zeta)\sin^2\theta}}{\mathrm{C}n},$$

$$\cos\theta - \cos\theta_0 < \frac{\lambda + \sqrt{\mathrm{A}(k - 2\mathrm{M}g\zeta)\sin^2\theta}}{\mathrm{C}n}.$$

Or, quelque grand que soit n, les autres constantes arbitraires restant les mêmes, les numérateurs des seconds membres de ces deux inégalités conserveront toujours des valeurs finies; car k et λ ne dépendent pas de n, et ζ reste compris entre le plus petit et le plus grand des rayons vecteurs menés du centre de gravité à la surface du corps. Par exemple, si nous appelons ρ le rayon minimum et λ' la valeur numérique de λ, les valeurs absolues des numérateurs dont il s'agit ne surpasseront jamais la limite

$$\lambda' + \sqrt{A(k - 2Mg\rho)}.$$

On pourra donc prendre n assez grand pour que la différence $\cos\theta - \cos\theta_0$ soit toujours comprise entre deux fractions aussi voisines de zéro qu'on voudra, et, par conséquent, reste elle-même aussi petite qu'on voudra, ce qui revient à dire qu'en prenant n suffisamment grand, θ s'écartera aussi peu qu'on voudra de sa valeur initiale θ_0. C'est la proposition qu'il s'agissait de prouver.

Pour donner une application, supposons qu'à l'origine du mouvement l'axe de figure soit vertical et que R soit alors la distance du centre de gravité au plan xy : on a, dans ce cas,

$$\theta_0 = 0,\quad \zeta_0 = R,\quad \alpha_0 = 0,\quad \beta_0 = 0,\quad \gamma_0 = -R;$$

de plus, l'équation

$$d\zeta = -\alpha da'' - \beta db'' - \gamma dc''$$

nous donne

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 = R\left(\frac{dc''}{dt}\right)_0 = -R\sin\theta_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = 0\,;$$

il suit de là

$$k = A(p_0^2 + q_0^2) + 2MgR,\quad \lambda = 0.$$

D'après les inégalités trouvées ci-dessus, on aura donc dans tout le mouvement, et en supposant, ce qui est permis, $\sin\theta$ positif,

$$1 - \cos\theta < \frac{\sin\theta\sqrt{A^2(p_0^2 + q_0^2) + 2AMg(R - \zeta)}}{Cn},$$

ou bien

$$\tang\frac{\theta}{2} < \frac{\sqrt{A^2(p_0^2 + q_0^2) + 2AMg(R - \zeta)}}{Cn}.$$

ou encore, en appelant comme ci-dessus ρ le plus petit rayon mené du centre de gravité à la surface,

$$\tang \frac{\theta}{2} < \frac{\sqrt{A^2(p_0^2 + q_0^2) + 2\,AMg\,(R-\rho)}}{Cn}.$$

Si donc on veut que l'axe qui était d'abord vertical ne fasse jamais avec sa direction primitive un angle plus grand qu'un angle donné ε, il suffira de remplir la condition

$$\frac{\sqrt{A^2(p_0^2 + q_0^2) + 2\,AMg\,(R-\rho)}}{Cn} < \tang \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$n > \frac{\sqrt{A^2(p_0^2 + q_0^2) + 2\,AMg\,(R-\rho)}}{C \tang \frac{\varepsilon}{2}}.$$

On sait qu'un ellipsoïde allongé est en équilibre instable lorsqu'il repose sur un plan horizontal par une des extrémités de son axe de figure, c'est-à-dire que, en général, il s'écartera d'une quantité finie de cette position, si on lui imprime une impulsion même très-petite. Mais, par ce qui précède, on voit que si, dans ce mouvement qu'on lui donne, la vitesse de rotation autour de l'axe de figure est suffisamment grande, le corps s'écartera aussi peu qu'on voudra de sa position primitive. En appelant $2a$ le diamètre de l'équateur et s le rapport de l'axe à ce diamètre, on trouvera que la condition précédente devient

$$n > \frac{\sqrt{a(1+s^2)[a(1+s^2)(p_0^2+q_0^2) + 10\,g(s-1)]}}{2a \tang \frac{\varepsilon}{2}}.$$

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE PHOTOMÉTRIE;

PAR M. L. COHEN-STUART,
Élève à l'Académie royale de Delft.

Étant donnés un ellipsoïde et un point lumineux en dehors de cette surface, on demande de déterminer, 1° la courbe de séparation d'ombre et de lumière; 2° la valeur de l'intensité de la lumière en chaque point de la partie éclairée; 3° la quantité de lumière recueillie par celle-ci.

1. Soient

$$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 = 1 \tag{1}$$

l'équation de l'ellipsoïde, et a_1, a_2, a_3 les coordonnées du point donné; l'équation

$$\left\{\begin{aligned}&(A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 - 1)(A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + A_3 a_3^2 - 1)\\ &\qquad = (A_1 a_1 x + A_2 a_2 y + A_3 a_3 z - 1)^2\end{aligned}\right. \tag{2}$$

sera celle de la surface conique qui, ayant a_1, a_2, a_3 pour centre, enveloppe l'ellipsoïde [*].

En combinant les équations (1) et (2), on voit aisément que la ligne de contact des deux surfaces, ou, ce qui revient au même, la courbe qui sépare la partie éclairée de la partie non éclairée, est la section de l'ellipsoïde par le plan

$$A_1 a_1 x + A_2 a_2 y + A_3 a_3 z - 1 = 0. \tag{3}$$

2. Désignons par u la longueur de la droite qui joint le point

[*] LEROY, *Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions*, § 293, deuxième édition.

donné à un point x, y, z de la partie éclairée, et par μ l'angle que forme cette droite avec la normale en ce point de l'ellipsoïde; l'intensité I de la lumière y sera $\frac{\rho \cos \mu}{u^2}$, ρ étant un coefficient constant.

En appelant ensuite α_1, α_2, α_3 les angles que forme la droite ci-dessus mentionnée avec les axes coordonnés, et β_1, β_2, β_3 les angles analogues pour la normale, on aura évidemment

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_1 - x}{u}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{a_2 - y}{u}, \quad \cos \alpha_3 = \frac{a_3 - z}{u},$$

$$\cos \beta_1 = \frac{A_1 x}{(A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos \beta_2 = \frac{A_2 y}{(A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos \beta_3 = \frac{A_3 z}{(A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\begin{aligned}\cos \mu &= \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \\ &= \frac{A_1 (a_1 - x) x + A_2 (a_2 - y) y + A_3 (a_3 - z) z}{u (A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{A_1 a_1 x + A_2 a_2 y + A_3 a_3 z - 1}{u (A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$

$$(4) \qquad \mathrm{I} = \frac{\rho (A_1 a_1 x + A_2 a_2 y + A_3 a_3 z - 1)}{[(a_1 - x)^2 + (a^2 - y)^2 + (a_3 - z)^2]^{\frac{3}{2}} (A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Observons: 1° que pour les points dont les coordonnées vérifient l'équation (3), on a $\mathrm{I} = 0$, comme on devait s'y attendre; 2° que pour le pied de la normale abaissée du point lumineux sur l'ellipsoïde, $\cos \mu$ étant un maximum et u en même temps un minimum, I est un maximum; 3° que l'équation $\mathrm{I} = \varphi(x, y, z) = c$, jointe à l'équation (1), fera connaître les projections des lignes de lumière égale, ou des lignes isothermes, en supposant que du point donné émanent des rayons de chaleur.

3. La quantité de lumière qui tombe sur l'ellipsoïde étant la même que celle qui est recueillie par la partie d'une surface quelconque interceptée par le cône circonscrit à l'ellipsoïde, il en résulte qu'en

coupant ce cône par un plan perpendiculaire à son axe, à une distance du centre égale à l'unité de longueur, il ne s'agira que d'obtenir la quantité de lumière recueillie par la surface de cette section, laquelle sera une ellipse.

Au premier abord, la détermination des axes de cette ellipse semble présenter quelques difficultés; mais on y parviendra facilement en considérant le cône comme asymptotique à un hyperboloïde, dont on déterminera les axes principaux à l'aide de l'équation connue entre ces axes et les coefficients de l'équation de cette surface rapportée au centre.

En effet, prenons le point donné a_1, a_2, a_3 pour origine d'un second système d'axes parallèles aux premiers, l'équation (2) de la surface conique circonscrite à l'ellipsoïde devient

$$\begin{aligned}&[A_1(x-a_1)^2+A_2(y-a_2)^2+A_3(z-a_3)^2-1](A_1a_1^2+A_2a_2^2+A_3a_3^2-1)^2\\ &\qquad = [A_1a_1(x-a_1)+A_2a_2(y-a_2)+A_3a_3(z-a^3)-1]^2,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&A_1(x-a_1)^2(A_2a_2^2+A_3a_3^2-1)+A_2(y-a_2)^2(A_1a_1^2+A_3a_3^2-1)\\ &+A_3(z-a_3)^2(A_1a_1^2+A_2a_2^2-1)-(A_1a_1^2+A_2a_2^2+A_3a_3^2-1)\\ &=2A_1A_2a_1a_2(x-a_1)(y-a_2)+2A_1A_3a_1a_3(x-a_1)(z-a_3)\\ &+2A_2A_3(y-a_2)(z-a^2)\\ &-2[A_1a_1(x-a_1)+A_2a_2(y-a_2)+A_3a_3(z-a_3)],\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned}&A_1(A_2a_2^2+A_3a_3^2-1)x^2+A_2(A_1a_1^2+A_3a_3^2-1)y^2\\ &+A_3(A_1a_1^2+A_2a_2^2-1)z^2-2A_1A_2a_1a_2xy\\ &-2A_1A_3a_1z_3xz-2A_2A_3a_2a_3yz=0,\end{aligned}$$

équation qui pourra s'écrire sous la forme simplifiée

$$(5)\qquad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=0.$$

L'hyperboloïde dont la surface (5) représente le cône asymptotique ayant le même centre, aura évidemment pour équation

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=H,$$

H étant une quantité positive.

On sait, de plus, que l'équation

$$(6)\quad \begin{cases} s^3 - s^2(A + A' + A'') - s(B''^2 - AA' + B'^2 - AA'' + B^2 - A'A'') \\ \qquad - (AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'') = 0 \end{cases}$$

a ses trois racines réelles, et que ces racines ont pour valeurs,

$$s' = \frac{H}{e^2},\quad s'' = \frac{H}{f^2},\quad s''' = \frac{H}{g^2},$$

en représentant par e^2, f^2 et g^2 les carrés des demi-axes de l'hyperboloïde [*].

Remarquons à présent que chacun des deux plans passant par un axe réel et un axe imaginaire coupe ce cône suivant deux de ses génératrices rectilignes, et que la tangente de la moitié de l'angle compris entre ces droites aura une valeur numérique égale à la longueur d'un des demi-axes de l'ellipse qu'il s'agissait de déterminer.

Mais l'équation (6) présentera deux cas distincts par rapport aux signes de ses trois racines. Elle pourra admettre deux racines positives et une négative, ou bien deux racines négatives et une positive. En désignant toujours par s', s'' les racines affectées du même signe, on aura en tous cas pour les valeurs des deux tangentes ou des deux axes de l'ellipse,

$$\frac{e}{g} = \left(-\frac{s'''}{s''}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \frac{f}{g} = \left(-\frac{s''}{s'}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Évaluons maintenant la quantité de lumière recueillie par la surface de cette ellipse, dont nous nommerons le grand axe $2a$, et le petit axe $2b$.

Soient ACB un quart d'ellipse, φ le point lumineux, l'intensité de la lumière au point P, dont les coordonnées rectangulaires sont x et y, ayant pour valeur $\rho\,\frac{\sin \mathrm{OP}\varphi}{\overline{\mathrm{P}\varphi}^2} = \frac{\rho}{\overline{\mathrm{P}\varphi}^3}$; la quantité de lumière recueillie par l'élément $\mathrm{P}r_1\,\mathrm{R}r_{11} = dx\,dy$ s'exprimera par $\frac{\rho\,dx\,dy}{\overline{\mathrm{P}\varphi}^3}$. En

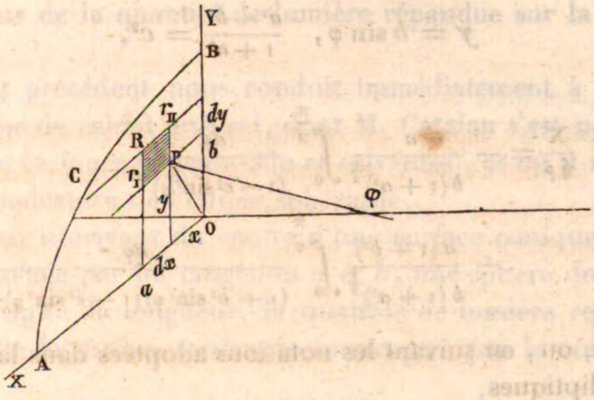
[*] Leroy, § 237.

la désignant par $d^2\mathrm{X}$ et substituant pour $\mathrm{P}\varphi$ sa valeur, on aura

$$d^2\mathrm{X} = \frac{\rho\, dx\, dy}{(1+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, en posant

$$a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} = f(y),$$



il viendra pour l'ellipse entière

$$\mathrm{X} = 4\int_0^b dy \int_0^{f(y)} \frac{\rho\, dx}{(1+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où l'on conclut, en intégrant,

$$\frac{\mathrm{X}}{4\rho} = \int_0^b \frac{f(y)\, dy}{(1+y^2)\left[1+y^2+f(y)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\mathrm{X}}{4\rho} = a\int_0^b \frac{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy}{(1+y^2)\left[1+a^2-(a^2-b^2)\frac{y^2}{b^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\mathrm{X}}{4\rho} = \frac{a}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^b \frac{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) dy}{(1+y^2)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a^2-b^2}{1+a^2}\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{X}{4\rho} = -\frac{a}{b^2(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^b \frac{dy}{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a^2-b^2}{1+a^2}\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{a(1+b^2)}{b^2(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^b \frac{dy}{(1+y^2)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a^2-b^2}{1+a^2}\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

En posant

$$y = b\sin\varphi,\quad \frac{a^2-b^2}{1+a^2} = c^2,$$

on aura

$$\frac{X}{4\rho} = -\frac{a}{b(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{a(1+b^2)}{b(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+b^2\sin^2\varphi)(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}},$$

c étant < 1; ou, en suivant les notations adoptées dans la théorie des fonctions elliptiques,

$$\frac{X}{4\rho} = -\frac{a}{b(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}F^1(c) + \frac{a(1+b^2)}{b^2(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\Pi^1(b^2, c).$$

Soient encore

$$a = \operatorname{tang}\varepsilon,\quad b = \cot\theta,$$

le résultat précédent deviendra

$$\frac{X}{4\rho} = -\sin\varepsilon\operatorname{tang}\theta\, F^1(c) + \frac{\sin\varepsilon}{\sin\theta\cos\theta}\Pi^1(\cot^2\theta, c),$$

et pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{X}{4\rho} = \frac{\sin\varepsilon}{\Delta(b,\theta)}\left[-\operatorname{tang}\theta\,\Delta(b,\theta)F^1(c) + \frac{\Delta(b,\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\Pi^1(\cot^2\theta, c)\right];$$

d'où l'on déduit, à l'aide de la formule

$$\frac{\Delta(c',\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\Pi^1(\cot^2\theta, c) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{tang}\theta\,\Delta(c',\theta)F^1(c) + F^1(c)F(c',\theta)$$
$$- E^1(c)F(c',\theta) - F^1(c)E(c',\theta)\ [*],$$

[*] Verhulst, *Traité élémentaire des Fonctions elliptiques*, § 56.

où l'on a

$$c'^2 = 1 - c^2 = \frac{1+b^2}{1+a^2} = \frac{\cos^2 \varepsilon}{\sin^2 \theta}, \quad \Delta(c', \theta) = \sin \varepsilon,$$

cette dernière expression

$$X = 4\rho \left[\frac{\pi}{2} + F^1(c) F(c', \theta) - E^1(c) F(c', \theta) - F^1(c) E(c', \theta) \right],$$

pour la valeur de la quantité de lumière répandue sur la surface de l'ellipsoïde.

Le résultat précédent nous conduit immédiatement à la solution d'un problème de calcul intégral, dont M. Catalan s'est occupé dans le tome VI de ce Journal (pages 340 et suivantes), et où il s'agissait de trouver la quadrature de l'ellipse sphérique.

En effet, en décrivant du centre d'une surface conique du second degré, déterminée par les tangentes a et b, une sphère dont le rayon soit égal à l'unité de longueur, la quantité de lumière recueillie par la partie ω de la surface sphérique interceptée par le cône sera $\omega\rho$; donc

$$\omega\rho = X, \quad \omega = \frac{X}{\rho},$$

et, en prenant une sphère qui a pour rayon r, on aura évidemment

$$O = r^2 \omega = r^2 \frac{X}{\rho}$$

$$= 4r^2 \left[\frac{\pi}{2} + F^1(c) F(c', \theta) - E^1(c) F(c', \theta) - F^1(c) E(c, \theta) \right].$$

Cette expression, moins compliquée que celle qui est donnée à l'endroit cité de ce Journal, s'accorde d'ailleurs parfaitement avec le résultat que M. Catalan a obtenu plus tard, en résolvant un autre problème du même genre par des considérations différentes. (*Voir* tome VI de ce Journal, p. 419.)

SUR LA GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE M. JELLETT,

QUI SE RAPPORTE AUX ATTRACTIONS;

PAR M. A. CAYLEY.

Les formules qu'a données M. Jellett pour exprimer les attractions d'un ellipsoïde au moyen de l'expression de la surface de l'ellipsoïde réciproque (tome XI de ce Journal, page 92) peuvent s'étendre au cas d'un nombre quelconque de variables.

Pour démontrer cela, je pars de cette formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{\varphi\left(\frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}\ldots\right)dx\,dy\ldots}{[(a-x)^2+(b-y)^2\ldots+u^2]^{\frac{1}{2}n+q}} \quad \left(\text{limites } \frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}\cdot\cdot=1\right)\\ &=\frac{fg\ldots\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+q)}\int_\eta^\infty \frac{\mathrm{S}s^{-q-1}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},\end{aligned}\right.$$

dans laquelle n est le nombre des variables $x, y, \ldots$, et où

$$(2)\qquad \mathrm{S}=\frac{(1-\sigma)^{-q}}{\Gamma(-q)}\int_0^1 t^{-q-1}\,\varphi[\sigma+t(1-\sigma)]\,dt,$$

$$\sigma=\frac{a^2}{s+f^2}+\frac{b^2}{s+g^2}\cdots+\frac{u^2}{s},$$

$$1=\frac{a^2}{\eta+f^2}+\frac{b^2}{\eta+g^2}\cdots+\frac{u^2}{\eta},$$

formule due à M. Boole qui l'a démontrée sous une forme un peu différente (*Irish Transactions,* tome XXI). La modification que j'y ai introduite se trouve démontrée dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* tome II, page 223 [*].

On déduit de là, en écrivant fx, gy,... au lieu de x, y,..., en réduisant à zéro les quantités a, b,..., u (ce qui donne aussi $\eta = 0$), et en

[*] Cette formule peut d'ailleurs se déduire comme cas particulier de la formule très-générale de M. Boole que M. Cayley a démontrée dans le cahier précédent. (J. L.)

donnant une forme convenable à la fonction φ,

(3) $$\int \frac{(x^2+y^2\ldots)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}n}\,dx\,dy\ldots}{(f^2x^2+g^2y^2\ldots)^2} = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)}\int_0^\infty \frac{s^{\frac{1}{2}n-3}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}$$

(les limites de l'intégrale au premier membre de cette équation étant données par $x^2+y^2\ldots=1$).

Donc, en écrivant

$$\Sigma = f^2g^2\ldots\int\frac{(x^2+y^2\ldots)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}n}\,dx\,dy\ldots}{(f^2x^2+g^2y^2\ldots)^2},$$

on aura

(4) $$\Sigma = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}f^2g^2\ldots}{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)}\int_0^\infty\frac{s^{\frac{1}{2}n-3}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}.$$

Soit Σ' ce que devient Σ en écrivant $\frac{1}{f}, \frac{1}{g},\ldots$ au lieu de $f, g,\ldots$: en écrivant en même temps $\frac{1}{s}$ au lieu de s, on obtient

(5) $$\Sigma' = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)}\frac{1}{fg\ldots}\int_0^\infty\frac{s\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}.$$

Et de là, en écrivant

(6) $$\frac{1}{f^2}\frac{d}{df}\Sigma' f = \mathrm{F},\quad \frac{1}{g^2}\frac{d}{dg}\Sigma' g = \mathrm{G},\ldots,$$

on déduit

(7) $$\mathrm{F} = \frac{-2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-2)}\frac{1}{fg\ldots}\int_0^\infty\frac{s}{s+f^2}\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},\ \text{etc.}$$

Cela étant, remarquons que l'intégrale

(8) $$\int_0^\infty\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}$$

est fonction homogène de l'ordre $(2-n)$ par rapport aux quantités f, g,... (en effet, cela se voit tout de suite en faisant $s=f^2\theta$). Donc

$$\int_0^\infty\left(\frac{-f^2}{s+f^2}-\frac{g^2}{s+g^2}\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}$$
$$=(2-n)\int_0^\infty\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},$$

ou, en écrivant $\frac{s}{s+f^2}-1$, etc., au lieu de $\frac{-f^2}{s+f^2}$, etc.,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty\left(\frac{s}{s+f^2}+\frac{s}{s+g^2}+\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}\\&=2\int_0^\infty\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},\end{aligned}\right.$$

et de là aussi

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty\left(\frac{-s}{s+f^2}+\frac{s}{s+g^2}+\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}\\&=2f^2\int_0^\infty\frac{1}{s+f^2}\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},\text{ etc.}\end{aligned}\right.$$

Donc enfin

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty\left(1-\frac{a^2}{s+f^2}\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}\\&=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{s}{s+f^2}+\frac{s}{s+g^2}+\ldots\right)\\-\frac{a^2}{f^2}&\left(\frac{-s}{s+f^2}+\frac{s}{s+g^2}+\ldots\right)\\-\frac{b^2}{g^2}&\left(\frac{s}{s+f^2}-\frac{s}{s+g^2}\ldots\right)-\ldots\end{aligned}\right\}\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty\left(1-\frac{a^2}{s+f^2}-\frac{b^2}{s+g^2}\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}\\&=-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-2\right).fg\ldots}{4\pi^{\frac{1}{2}n}}\left\{\begin{aligned}&(\mathrm{F}+\mathrm{G}+\ldots)-\frac{a^2}{f^2}(-\mathrm{F}+\mathrm{G}+\ldots)\\&-\frac{b^2}{g^2}(\mathrm{F}-\mathrm{G}+\ldots)-\ldots\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

En particularisant d'une manière convenable la formule (1), on obtient, pour le cas de $\frac{a^2}{f^2}+\frac{b^2}{g^2}\cdots>1$, cette formule connue

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}\mathrm{V}&=\int\frac{dx\,dy\ldots}{[(a-x)^2+(b-y)^2\ldots]^{\frac{1}{2}n-1}}\\&=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}fg\ldots}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\int_0^\infty\left(1-\frac{a^2}{s+f^2}-\ldots\right)\frac{ds}{\sqrt{(s+f^2)\ldots}}\end{aligned}\right.$$

$\left(\text{l'équation des limites étant, comme auparavant, } \frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}+\ldots=1\right)$.

Et de là, vu la formule (12), résulte

$$(14)\quad V = -\frac{f^2 g^2 \ldots}{2(n-2)}\left[(F+G\ldots) - \frac{a^2}{f^2}(-F+G+\ldots) - \frac{b^2}{g^2}(F-G+\ldots)\ldots\right].$$

L'expression de Σ, en écrivant $r\cos\alpha$, $r\cos\beta$,... au lieu de x, y,..., remplaçant $dx\,dy\ldots$ par $r^{n-1}\,dr\,dS$ et intégrant depuis $r=0$ jusqu'à $r=1$, se réduit à

$$(15)\qquad \Sigma = f^2 g^2 \ldots \int \frac{dS}{(f^2\cos^2\alpha + g^2\cos^2\beta + \ldots)^2},$$

de sorte qu'au cas de $n=3$ cette fonction se réduit à l'expression qu'a donnée M. Jellett de la surface d'un ellipsoïde. Donc, en se rappelant que les attractions sont représentées par $\frac{dV}{da}, \frac{dV}{db}, \frac{dV}{dc}$, on voit que l'équation (14) équivaut, pour ce cas, aux formules de M. Jellett.

Remarquons qu'en transformant l'intégrale (4) de la même manière dont nous avons transformé l'intégrale (8), on obtient

$$(16)\quad \Sigma = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n} f^2 g^2 \ldots}{\Gamma(\frac{1}{2}n-1)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{s+f^2} + \frac{1}{s+g^2}\ldots\right) \frac{s^{\frac{1}{2}n-2}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}},$$

ce qui donne pour $n=3$ cette expression très-simple de la surface de l'ellipsoïde aux demi-axes f, g, h,

$$(17)\quad \Sigma = \pi f^2 g^2 h^2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{s+f^2} + \frac{1}{s+g^2} + \frac{1}{s+h^2}\right) \frac{s^{-\frac{1}{2}}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)(s+h^2)}},$$

formule qui se vérifie tout de suite au cas de $f=g=h$.

L'expression encore plus simple que donne l'équation (4), savoir,

$$(18)\qquad \Sigma = -\pi f^2 g^2 h^2 \int_0^\infty \frac{s^{-\frac{3}{2}}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)(s+h^2)}},$$

n'est pas exempte de difficulté à cause de la valeur apparemment infinie du second membre de l'équation.

Au cas d'une sphère, cela se réduit à

$$\Sigma = -\pi f^2 \int_0^\infty \frac{s^{-\frac{3}{2}}\,ds}{(1+s)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui serait, en effet, exact si la formule

$$\int_0^\infty \frac{s^{m-1}\,ds}{(1+s)^{m+n}} = \frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}$$

subsistait pour les valeurs négatives de m. Cela nous apprend que les intégrales de la forme

$$(19)\qquad \int_0^\infty \frac{s^{-q-1}\,ds}{\sqrt{(s+f^2)(s+g^2)\ldots}}$$

ne sont pas à rejeter au cas des valeurs positives de q; il est même facile, en répétant continuellement le procédé de réduction que nous venons d'employer, de présenter ces intégrales sous une forme où il n'y ait plus de terme infini. En m'aidant de l'analogie de quelques formules qui se trouvent dans mon Mémoire *Sur quelques formules du calcul intégral* (tome XI de ce Journal, page 231), je crois même pouvoir avancer que cette intégrale doit se remplacer par

$$(20)\qquad \frac{-1}{2\sin q\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k+si)^{-q-1}\,ds}{\sqrt{(k+si+f^2)(k+si+g^2)\ldots}}$$

où, comme à l'ordinaire, $i=\sqrt{-1}$ et où k dénote une quantité quelconque dont la partie réelle ne s'évanouit pas. Mais je renvoie cette discussion à une autre occasion.

NOUVELLES RECHERCHES

SUR

LES FONCTIONS DE M. STURM;

PAR M. A. CAYLEY.

En développant une remarque faite par M. Sylvester dans un Mémoire publié il y a huit ou neuf ans dans le *Philosophical Magazine*, j'ai trouvé des expressions assez simples des fonctions de M. Sturm, composées au moyen des coefficients mêmes; ce qui convient mieux que d'exprimer ces fonctions, comme je l'ai déjà fait dans le tome XI de ce Journal, page 297, par les sommes des puissances. D'ailleurs il ne m'est plus nécessaire de parler des expressions de M. Sylvester, ou même des divisions successives de M. Sturm; mais ma méthode fait voir directement que les fonctions que je vais définir sont douées de la propriété fondamentale sur laquelle se repose la théorie de M. Sturm, à savoir que, en considérant trois fonctions successives, la première et la dernière fonction sont de signe contraire pour toute valeur de la variable qui fait évanouir la fonction intermédiaire; cependant je n'ai pas encore réussi à démontrer dans toute sa généralité l'équation identique d'où dépend cette propriété.

Soient d'abord V, V′ des fonctions du même degré n,

$$V = ax^n + bx^{n-1} + \ldots,$$

$$V' = a'x^n + b'x^{n-1} + \ldots,$$

et écrivons

$$-F_1 = \begin{vmatrix} V, & V' \\ a & a' \end{vmatrix},$$

$$F_2 = \begin{vmatrix} xV, & V, & xV', & V' \\ a & \cdot & a' & \cdot \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \end{vmatrix},$$

$$-F_3 = \begin{vmatrix} x^2V, & xV, & V, & x^2V', & xV', & V' \\ a & \cdot & \cdot & a' & \cdot & \cdot \\ b & a & \cdot & b' & a' & \cdot \\ c & b & a & c' & b' & a' \\ d & c & b & d' & c' & b' \\ e & d & c & e' & d' & c' \end{vmatrix}, \text{etc.}$$

(ce qui suffit pour faire voir la loi de ces fonctions successives F_1, F_2,...). Il résulte des propriétés élémentaires des déterminants que ces fonctions sont des ordres $\overline{n-1}$, $\overline{n-2}$, $\overline{n-3}$, etc. respectivement, par rapport à la variable x. En effet, dans F_1 le coefficient de x^n se réduit à $\begin{vmatrix} a, & a' \\ a & a' \end{vmatrix}$, savoir, à zéro; de même, dans F_2, les coefficients de x^n et x^{n-1} se réduisent chacun à zéro; et ainsi de suite.

Soient encore

$$P_1 = \begin{vmatrix} a, & a' \\ b & b \end{vmatrix}, \qquad P'_1 = \begin{vmatrix} a, & a' \\ c & c' \end{vmatrix},$$

$$P_2 = \begin{vmatrix} a, & \cdot & a' & \cdot \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \\ d & c & d' & c' \end{vmatrix}, \qquad P'_2 = \begin{vmatrix} a, & \cdot & a' & \cdot \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \\ e & d & e' & d' \end{vmatrix},$$

$$P_3 = \begin{vmatrix} a, & \cdot & \cdot & a', & \cdot & \cdot \\ b & a & \cdot & b' & a' & \cdot \\ c & b & a & c' & b' & a' \\ d & c & b & d' & c' & b' \\ e & d & c & e' & d' & c' \\ f & e & d & f' & e' & d' \end{vmatrix}, \text{etc.}, \qquad P'_3 = \begin{vmatrix} a, & \cdot & \cdot & a', & \cdot & \cdot \\ b & a & \cdot & b' & a' & \cdot \\ c & b & a & c' & b' & a' \\ d & c & b & d' & c' & b' \\ e & d & c & e' & d' & c' \\ g & f & e & g' & f' & e' \end{vmatrix}, \text{etc.},$$

(ce qui suffit pour indiquer la loi). On aura entre ces différentes fonctions F, P, P′ cette suite remarquable d'équations identiques,

$$P_1^2 F_3 + (xP_1 P_2 + P_1 P_2^1 + P_1^1 P_2) F_2 + P_2^2 F_1 = 0,$$

$$P_2^2 F_4 + (xP_2 P_3 + P_2 P_3^1 + P_2^1 P_3) F_3 + P_3^2 F_2 = 0,$$

etc.,

lesquelles équations, dans ce Mémoire, seront prises pour vraies. Cela étant, il est évident que F_1 et F_3 seront de signe contraire pour toute valeur de x qui fait évanouir F_2; F_2 et F_4 seront de signe contraire pour toute valeur de x qui fait évanouir F_3; et ainsi de suite.

Ces formules renferment le cas où les deux fonctions V, V′ ne sont pas du même degré (en effet, pour les y adapter, on n'a besoin que de faire évanouir quelques-uns des premiers coefficients de V ou de V′). Il est donc permis de supposer que V′ soit la dérivée de V. Dans ce cas, $F_1 = aV'$, et on verra dans un moment que les fonctions F_2, F_3,... contiennent chacune le facteur a^2, de manière qu'il convient d'écrire $F_2 = a^2 V_2$, $F_3 = a^2 V_3$,.... Ce facteur a^2 peut être évidemment écarté, et ce sera de même avec le facteur a de F, pourvu, ce que je supposerai dans la suite, que a soit positif. On aura de cette manière les fonctions V, V′, V_2, V_3,... douées des propriétés des fonctions de M. Sturm. En effet, elles seront précisément les fonctions fx, $f_1 x$, $f_2 x$,... du Mémoire déjà cité, ce qui cependant pourrait être difficile à démontrer à priori.

On déduit tout de suite des expressions de F_2, F_3,...,

$$aV_2 = -\begin{vmatrix} V, & xV', & V' \\ a & na & . \\ b & \overline{n-1}\,b & na \end{vmatrix}, \quad aV_3 = \begin{vmatrix} xV, & V, & x^2V', & xV', & V' \\ a & . & na & . & \\ b & a & \overline{n-1}\,b & na & . \\ c & b & \overline{n-2}\,c & \overline{n-1}\,b & na \\ d & c & \overline{n-3}\,d & \overline{n-2}\,c & \overline{n-1}\,b \end{vmatrix}, \text{etc.}$$

Ces formules se simplifient au moyen des propriétés connues des déterminants, et en écrivant

$$xV' - nV = -U,$$

cela donne

$$aV_2 = \begin{vmatrix} V, & U, & V' \\ a & \cdot & \cdot \\ b & b & na \end{vmatrix}, \qquad aV_3 = \begin{vmatrix} xV, & V, & xU, & U, & V' \\ a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & a & b & \cdot & \cdot \\ c & b & 2c & b & na \\ d & c & 3d & 2c & \overline{n-1}\,b \end{vmatrix}, \text{ etc.};$$

ou enfin, et en écrivant un autre terme de la suite, afin de mieux faire voir la loi,

$$V_2 = -\begin{vmatrix} U, & V' \\ b & na \end{vmatrix}, \qquad V_3 = -\begin{vmatrix} V, & xU, & U, & V' \\ a & b & \cdot & \cdot \\ b & 2c & b & na \\ c & 3d & 2c & \overline{n-1}\,b \end{vmatrix},$$

$$V_4 = -\begin{vmatrix} xV, & V, & x^2U, & xU, & V' \\ a & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ b & a & 2c & b & \cdot \\ c & b & 3d & 2c & na \\ d & c & 4e & 3d & \overline{n-1}\,b \\ e & d & 5f & 4e & \overline{n-2}\,c \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

formules dans lesquelles

$$\left\{\begin{aligned} V &= ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots, \\ V' &= \phantom{ax^n + {}} nax^{n-1} + \overline{n-1}\,bx^{n-2} + \ldots, \\ U &= \phantom{ax^n + {}} bx^{n-1} + 2cx^{n-2} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et où, en substituant ces valeurs, on peut commencer pour V_2 avec le terme qui contient x^{n-2}, pour V_3 avec le terme qui contient x^{n-3}, et ainsi de suite, puisque les termes des ordres plus hauts s'évanouissent identiquement. Voilà, je crois, les expressions les plus simples des fonctions de M. Sturm.

Je donnerai en conclusion ces formes développées des fonctions jusqu'à V_4.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V} = {} & ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots; \\
\mathrm{V}' = {} & nax^{n-1} + \overline{n-1}\, bx^{n-2} + \overline{n-2}\, cx^{n-3} + \ldots; \\
\mathrm{V}_2 = {} & -na \{ 2cx^{n-2} + 3dx^{n-3} + \ldots, \\
& + b \{ \overline{n-1}\, bx^{n-2} + \overline{n-2}\, cx^{n-3} + \ldots; \\
\mathrm{V}_3 = {} & [2nabc - \overline{n-1}\, b^3] \{ dx^{n-3} + ex^{n-4} + \ldots, \\
& + [-2n^2ac + \overline{n-1}\, ab^2] \{ 4ex^{n-3} + 5fx^{n-4} + \ldots, \\
& + [3na^2d - (3n-2)abc + (n-1)b^3] \{ 3dx^{n-3} + 4ex^{n-4} + \ldots, \\
& + [-3abd + 4ac^2 - b^2c] \{ (n-2)cx^{n-3} + (n-3)dx^{n-4} + \ldots; \\
\mathrm{V}_4 = {} & \mathrm{A} \{ fx^{n-4} + gx^{n-5} + \ldots, \\
& + \mathrm{B} \{ ex^{n-4} + fx^{n-5} + \ldots, \\
& + \mathrm{C} \{ 6gx^{n-4} + 7hx^{n-5} + \ldots, \\
& + \mathrm{D} \{ 5fx^{n-4} + 6gx^{n-5} + \ldots, \\
& + \mathrm{E} \{ 4ex^{n-4} + 5fx^{n-5} + \ldots, \\
& + \mathrm{F} \{ \overline{n-3}\, dx^{n-4} + \overline{n-4}\, ex^{n-5} + \ldots;
\end{aligned}
$$

dans cette dernière expression j'ai mis, pour abréger,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} = {} & 9na^2bd^2 - 8na^2bce + (4n-4)ab^3e - (10n-12)ab^2cd \\
& + (4n-8)abc^3 - (n-2)b^3c^2 + (2n-2)b^4d, \\
\mathrm{B} = {} & 10na^2bcf - 12na^2bde - 16na^2c^2e + 18na^2cd^2 - (5n-5)ab^3f \\
& + (18n-16)ab^2ce + (3n-9)ab^2d^2 - (24n-36)abc^2d + (8n-16)ac^4 \\
& - (3n-3)b^4e + (5n-7)b^3cd - (2n-4)b^2c^3, \\
\mathrm{C} = {} & 8na^3ce - 9na^3d^2 - (4n-4)a^2b^2e + (10n-12)a^2bcd \\
& - (4n-8)a^2c^3 - (2n-2)ab^3d + (n-2)ab^2e^2, \\
\mathrm{D} = {} & -10na^3cf + 12na^3de + (5n-5)a^2b^2f - (2n-8)a^2bce \\
& - (12n-9)a^2bd^2 + (4n-12)a^2c^2d - (n-1)ab^3e + (9n-9)ab^2cd \\
& - (4n-8)abe^3 - (2n-2)b^4d + \overline{n-2}\, b^3c^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E = {} & 15na^3df - 16na^3e^2 - (15n-10)a^2bcf + (17n-12)a^2bde \\
& + (16n-16)a^2c^2e - (15n-18)a^2cd^2 + (5n-5)ab^3f \\
& - (17n-18)ab^2ce + (14n-24)abc^2d - (n-3)ab^2d^2 \\
& - (4n-8)ac^4 + (3n-3)b^4e - (3n-5)b^3cd + (n-2)b^2c^3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F = {} & -15a^2bdf + 16a^2be^2 + 20a^2c^2f - 27a^2d^3 - 48a^2cde \\
& - 5ab^2cf + 7ab^2de - 4abc^2e - 18abcd^2 + 4ac^3d \\
& - 3b^3ce + 4b^3d^2 - b^2c^2d^2.
\end{aligned}
$$

Il serait évidemment inutile de vouloir pousser plus loin ces calculs.

SUR LES FONCTIONS DE LAPLACE;

Par M. A. CAYLEY.

J'ai réussi à étendre à un nombre quelconque de variables la théorie des fonctions de Laplace, en me fondant sur le théorème que voici :

« Les coefficients $l, m, \ldots, l', m', \ldots$ étant assujettis aux conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} l^2 + m^2 + \ldots = 0, \\ l'^2 + m'^2 + \ldots = 0, \end{cases}$$

» et les limites de l'intégration étant données par

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + \ldots = 1,$$

» l'on aura pour toutes valeurs entières et positives de s, s', excepté
» pour $s = s'$,

$$(3) \qquad \int (lx + my + \ldots)^s (l'x + m'y + \ldots)^{s'} dx dy \ldots = 0,$$

» et pour $s = s'$,

$$(4) \quad \int (lx + my + \ldots)^s (l'x + m'y + \ldots)^s dx dy \ldots = \mathrm{N}_s (ll' + mm' + \ldots)^s,$$

» en faisant, pour abréger,

$$(5) \qquad \mathrm{N}_s = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}\,\Gamma(s+1)}{2^s\,\Gamma\left(\frac{1}{2}n + s + 1\right)}$$

» (où n dénote le nombre des variables). »

En admettant d'abord comme vrai ce théorème qui sera démontré plus bas, je remarque qu'il est permis d'écrire $\frac{d}{da}, \frac{d}{db}, \ldots, \frac{d}{da'}, \frac{d}{db'}, \ldots,$

35..

au lieu de l, m,..., l', m',.... Ces nouveaux symboles se rapportent à de certaines fonctions f, f' de a, b,... et de a', b',... respectivement. De là ce nouveau théorème :

« Les fonctions f, f' étant assujetties aux conditions

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{d^2f}{da^2}+\frac{d^2f'}{db^2}+\ldots=0, \\ \frac{d^2f'}{da'^2}+\frac{d^2f'}{db^2}+\ldots=0, \end{array}\right.$$

» on aura (entre les mêmes limites qu'auparavant), excepté pour $s=s'$,

$$(7)\qquad \int\left(x\frac{d}{da}+y\frac{d}{db}+\ldots\right)^s f\left(x\frac{d}{da'}+y\frac{d}{db'}+\ldots\right)^{s'} f'\, dxdy\ldots=0,$$

» et pour $s=s'$,

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \int\left(x\frac{d}{da}+y\frac{d}{db}+\ldots\right)^s f\left(x\frac{d}{da'}+y\frac{d}{db'}+\ldots\right)^s f'\, dxdy\ldots \\ =\mathrm{N}_s\left(\frac{d}{da}\frac{d}{da'}+\frac{d}{db}\frac{d}{db'}+\ldots\right)^s ff'. \text{ »} \end{array}\right.$$

Il est facile de voir que les expressions

$$\left(x\frac{d}{da}+y\frac{d}{db}+\ldots\right)^s f, \quad \left(x\frac{d}{da'}+y\frac{d}{db'}+\ldots\right)^{s'} f'$$

satisfont à l'équation

$$(9)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\ldots=0,$$

et, de plus, qu'elles sont les fonctions entières et homogènes, des degrés s et s' respectivement, les plus générales qui puissent satisfaire à cette équation. On a donc ce théorème :

« Soient V_s, $\mathrm{W}_{s'}$ les fonctions entières et homogènes des degrés s » et s' respectivement, les plus générales qui satisfassent à l'équa- » tion (9); on aura toujours, excepté au cas de $s=s'$,

$$(10)\qquad \int \mathrm{V}_s \mathrm{W}_{s'}\, dxdy\ldots=0$$

» (les limites étant les mêmes qu'auparavant.) »

Écrivons à présent

$$f=(a^2+b^2+\ldots)^{-\frac{1}{2}n+1},$$

valeur qui satisfait à la première des équations (8), et nous obtiendrons par la différentiation successive, en faisant attention à la seconde de ces mêmes équations,

$$(11)\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d}{da}\frac{d}{da'}+\frac{d}{db}\frac{d}{db'}+\ldots\right)^s(a^2+b^2+\ldots)^{-\frac{1}{2}n+1}f'\\ &=(-)^s\,2^s\frac{\Gamma(\frac{1}{2}n+s-1)}{\Gamma(\frac{1}{2}n-1)}\left(a\frac{d}{da'}+b\frac{d}{db'}+\ldots\right)^s f'(a^2+b^2+\ldots)^{-\frac{1}{2}n-s+1}.\end{aligned}\right.$$

En représentant, comme auparavant, par W_s la fonction

$$\left(x\frac{d}{da'}+y\frac{d}{db'}+\ldots\right)^s f',$$

soit W'_s ce que devient W_s en écrivant a, b,... au lieu de x, y,..., c'est-à-dire écrivons

$$W'_s=\left(a\frac{d}{da'}+b\frac{d}{db'}+\ldots\right)^s f'.$$

On déduit de là, et au moyen de l'équation (11), en substituant dans l'équation (8), la formule

$$(12)\left\{\begin{aligned} &\frac{(-)^s}{\Gamma(s+1)}\int\left(x\frac{d}{da}+y\frac{d}{db}+\ldots\right)^s(a^2+b^2+\ldots)^{-\frac{1}{2}n+1}W_s\,dxdy\ldots\\ &\qquad=M_s(a^2+b^2+\ldots)^{-\frac{1}{2}n-s+1}W'_s,\end{aligned}\right.$$

en faisant, pour abréger,

$$\Gamma(s+1)M_s=\frac{\Gamma 2^s(\frac{1}{2}n+s-1)}{\Gamma(\frac{1}{2}n-1)}N_s,$$

ou bien

$$(13)\qquad M_s=\frac{4\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-1)(n+2s)(n+2s-2)}.$$

Soit maintenant

$$(14)\quad \frac{1}{[(a-x)^2+\ldots]^{\frac{1}{2}n-1}}=\frac{Q_0}{(a^2+b^2+\ldots)^{\frac{1}{2}n-1}}\cdots+\frac{Q_s}{(a^2+b^2+\ldots)^{\frac{1}{2}n+s-1}}\cdots,$$

ou, autrement dit, soit

$$(15)\qquad Q_s=\frac{(-)^s}{\Gamma(s+1)}\left(x\frac{d}{da}+y\frac{d}{db}+\ldots\right)^s(a^2+b^2+\ldots)^{-\frac{1}{2}n+1},$$

l'équation (12) devient

$$(16) \qquad \int Q_s W_s \, dx dy \ldots = M_s W'_s$$

[où la valeur de M_s est donnée par l'équation (13)]. Les deux équations (10) et (16) contiennent la théorie des fonctions W_s, Q_s, lesquelles comprennent évidemment, comme cas particulier, les fonctions de Laplace.

Pour démontrer le théorème exprimé par les équations (1), (2), (3), (4), (5), je fais d'abord abstraction des équations (1), et j'écris

$$x = l\xi + l'\eta + l''\zeta \ldots,$$

$$y = m\xi + m'\eta + m''\zeta \ldots,$$

où les coefficients sont tels que l'équation

$$x^2 + y^2 + \ldots = p\xi^2 + 2q\xi\eta + p'\eta^2 + p''\zeta^2 + \ldots$$

soit identiquement vraie. Cela suppose que les valeurs de p, p', q soient respectivement $l^2 + m^2 + \ldots$, $l'^2 + m'^2 + \ldots$, et $ll' + m'm' + \ldots$, et que les sommes de produits, telles que $ll'' + mm'' + \ldots$, $l'l'' + m'm'' + \ldots$ se réduisent chacune à zéro. De là

$$dx dy \ldots = \sqrt{pp' - q^2}\,\sqrt{p''} \ldots d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots,$$

$$lx + my + \ldots = p\xi + q\eta,$$

$$l'x + m'y + \ldots = q\xi + p'\eta.$$

En représentant par I l'intégrale au premier membre de l'équation (3), cela donne

$$\mathrm{I} = \sqrt{pp' - q^2}\,\sqrt{p''} \cdots \int (p\xi + q\eta)^s (q\xi + p'\eta)^{s'} d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots,$$

l'équation des limites étant

$$p\xi^2 + 2q\xi\eta + p'\eta^2 + p''\zeta^2 + \ldots = 1.$$

Cette intégrale se simplifie en écrivant

$$\xi\sqrt{p} + \frac{q\eta}{\sqrt{p}} = \xi_{,}, \quad \sqrt{p' - \frac{q^2}{q}}\,\eta = \eta_{,}, \quad \sqrt{p''}\zeta = \zeta_{,}, \ldots$$

Cela donne

$$\sqrt{pp'+q^2}\,\sqrt{p''}\ldots d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots = d\xi_,\,d\eta_,\,d\zeta_,\ldots,$$

$$p\xi + q\eta = \sqrt{p}\,\xi_,,$$

$$q\xi + p'\eta = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(q\xi + \sqrt{pp'-q^2}\,\eta_,\right),$$

et de là

$$\mathrm{I} = p^{\frac{1}{2}(s-s')}\int \xi_,^s\left(q\xi_, + \sqrt{pp'-q^2}\,\eta_,\right)^{s'} d\xi_, d\eta_, d\zeta_,\ldots,$$

l'équation des limites étant

$$\xi_,^2 + \eta_,^2 + \ldots = 1.$$

En supposant $s > s'$, l'intégrale s'évanouit pour $p = 0$, et de même quand $s' > s$, elle s'évanouit pour $p' = 0$. Donc, en écrivant $p = 0$, $p' = 0$, on aura toujours, excepté pour $s = s'$, l'équation $\mathrm{I} = 0$; ce qui revient à l'équation (3). Au cas de $s = s'$, en écrivant de même $p = 0$, $p' = 0$, on trouve

$$\mathrm{I} = q^s \int \xi_,^s\,(\xi_, + i\eta_,)^s\, d\xi_, d\eta_, d\zeta_,\ldots$$

(où, comme à l'ordinaire, $i = \sqrt{-1}$). En faisant attention à la valeur de q, et en comparant avec l'équation (4), cette dernière équation sera démontrée en vérifiant la formule

$$\mathrm{N}_s = \int \xi_,^s\,(\xi_, + i\eta_,)^s\, d\xi_, d\eta_, d\zeta_,\ldots.$$

Soient pour cela

$$\xi_, = \rho\cos\theta, \quad \eta_, = \rho\sin\theta.$$

Cela donne (en omettant la partie imaginaire qui s'évanouit évidemment)

$$\mathrm{N}_s = \int \rho^{2s+1}\cos^s\theta\cos s\theta\, d\rho\, d\theta\, d\zeta\ldots.$$

En effectuant d'abord l'intégration par rapport à $\zeta_,,\ldots$, les limites de ces variables sont données par

$$\zeta_,^2 + \ldots = 1 - \rho^2,$$

et l'on trouve tout de suite

$$\mathrm{N}_s = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\int \rho^{2s+1}(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n-1}\cos^s\theta\cos s\theta\, d\rho\, d\theta.$$

Cette formule doit être intégrée depuis $\rho = 0$ à $\rho = 1$, et depuis $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$; mais en multipliant par quatre, on peut n'étendre l'intégration par rapport à θ que depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$. De là

$$N_s = \frac{4\pi^{\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma\frac{1}{2}n}\int_0^1 \rho^{2s+1}(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n-1}d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^s\theta\cos s\theta\, d\theta;$$

et enfin, au moyen des formules connues

$$\int_0^1 \rho^{2s+1}(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n-1}d\rho = \frac{\Gamma(s+1)\Gamma\frac{1}{2}n}{2\Gamma(\frac{1}{2}n+s+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^s\theta\cos s\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2^{s+1}},$$

on retrouve la formule (5), laquelle il s'agissait de démontrer. Ainsi le théorème fondamental est complétement établi.

ANALYSE

De l'ouvrage de STEWART, *intitulé :* QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX D'UN GRAND USAGE DANS LES HAUTES MATHÉMATIQUES ;

PAR M. P. BRETON (DE CHAMP),

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

La plupart des théorèmes de géométrie énoncés par Stewart dans l'ouvrage auquel il a donné ce titre [*], peuvent être considérés comme des corollaires de trois propositions principales. Quelques-uns s'y rattachent par l'analogie ; enfin, un certain nombre sont simplement des théorèmes particuliers. On sait que l'auteur n'en a démontré que cinq. J'ignore si les autres ont été l'objet de quelques recherches ; cependant ceux que M. Chasles a cités, dans son *Aperçu historique,* ont dû intéresser les géomètres et provoquer des efforts de leur part. S'il n'a rien été publié sur ce sujet, cela tient, sans doute, à ce que l'on a regardé comme vrais plusieurs énoncés qui ne le sont pas, c'est-à-dire ne se vérifient que sous certaines conditions, non indiquées par le géomètre anglais. Cette circonstance, que son grand renom ne permettait guère de soupçonner, va ressortir de l'analyse qui suit.

PREMIER THÉORÈME GÉNÉRAL.

1. Soient O un point quelconque, A_1, A_2,..., A_m, m points donnés,

---

[*] *Some general theorems of considerable use in the higher parts of Mathematics,* by MATTEW STEWART. Édinburgh, 1746.

J'ai annoncé à l'Académie des Sciences, le 8 juin 1846, que plusieurs des propositions contenues dans cet ouvrage sont fausses, c'est-à-dire ne se vérifient que dans des cas particuliers. La grande estime dont jouit le nom de Stewart en Angleterre m'a fait penser qu'il convenait de rendre publiques les preuves de cette assertion.

k_1, k_2,..., k_m autant de coefficients également donnés, et A'_1, A'_2,..., A'_{n+1}, $n+1$ points inconnus. La proposition XLIV revient à dire qu'on peut déterminer ces derniers, n étant moindre que m, de manière que la relation

$$\frac{k_1\overline{OA_1}^{2n}+k_2\overline{OA_2}^{2n}+\ldots+k_m\overline{OA_m}^{2n}}{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_m}=\frac{\overline{OA'_1}^{2n}+\overline{OA'_2}^{2n}+\ldots+\overline{OA'_{n+1}}^{2n}}{n+1}$$

se vérifie quel que soit le point O. En supposant les coefficients k_1, k_2,..., k_m égaux à l'unité et $n < m-1$, on a l'énoncé de la proposition XLIII.

Je regarderai la somme $k_1+k_2+\ldots+k_m$ comme positive; car si elle ne l'était pas, il suffirait, pour la rendre telle, de changer les signes de tous les termes dans le premier membre, ce qui est permis.

Cette somme ne saurait être nulle, car le premier membre deviendrait infini ou indéterminé, ce qui n'offrirait aucun sens.

Les points donnés étant rapportés à deux axes rectangulaires, cette relation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathbf{S}_{i=1}^{i=m} k_i[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2]^n}{\mathbf{S}_{i=1}^{i=m} k_i}=\frac{\mathbf{S}_{i=1}^{i=n+1}[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2]^n}{n+1},$$

en appelant a_i, b_i les coordonnées du point A_i; ξ_i, η_i celles de A'_i, et x, y celles de O.

Si l'on développe les deux membres, on trouve une équation en x, y, laquelle se réduit au degré $2n-1$. Comme elle doit être satisfaite quelque valeur qu'on attribue à chacune de ces variables, il faut que les coefficients de tous ses termes soient nuls [*]. En les égalant à

---

[*] On peut donner de ce principe la démonstration que voici :

Soit $F=0$ une équation entre les variables x, y, qu'on suppose vérifiées quelles que soient les valeurs qui leur sont assignées. Écrivons

$$F=u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\ldots+u_2+u_1+u_0,$$

u_i étant l'ensemble des termes de degré i qui se trouvent dans F. Si l'on fait $y=\alpha' x$, en désignant par α' un coefficient arbitraire, il vient

$$A'_n x^n+A'_{n-1}x^{n-1}+A'_{n-2}x^{n-2}+\ldots+A'_2x^2+A'_1x+u_0=0,$$

A'_i étant une fonction de α' qui s'élève au degré i.

Si l'on fait maintenant varier x, sans que α' change de valeur, comme cette équation

zéro, on a les équations qu'il faut résoudre pour déterminer les points A'_i lorsque cela est possible.

2. Supposons d'abord l'exposant n égal à l'unité; nous aurons la proposition XII. Les équations obtenues comme il vient d'être dit sont :

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i a_i,$$

$$\eta_1 + \eta_2 = \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i,$$

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2 = \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i(a_i^2 + b_i^2),$$

les sommes étant prises de $i = 1$ à $i = m$. On voit que le centre de gravité des points cherchés A'_1, A'_2 n'est autre chose que celui des points donnés A_i sollicités par des forces k_i parallèles entre elles. Si l'on prend ce centre pour origine des coordonnés, il vient

$$\xi_1 + \xi_2 = 0, \quad \eta_1 + \eta_2 = 0,$$

d'où

$$\xi_2 = -\xi_1 \quad \text{et} \quad \eta_2 = -\eta_1,$$

et, par suite,

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \frac{1}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i(a_i^2 + b_i^2).$$

---

se vérifie, par hypothèse, quel que soit x, il faut que l'on ait séparément

$$A'_n = 0, \quad A'_{n-1} = 0, \quad A'_{n-2} = 0, \ldots, \quad A'_2 = 0, \quad A'_1 = 0, \quad u_0 = 0;$$

en prenant d'autres coefficients α'', α''',..., il vient de même

$$A''_n = 0, \quad A''_{n-1} = 0, \quad A''_{n-2} = 0, \ldots, \quad A''_2 = 0, \quad A''_1 = 0,$$
$$A'''_n = 0, \quad A'''_{n-1} = 0, \quad A'''_{n-2} = 0, \ldots, \quad A'''_2 = 0, \quad A'''_1 = 0,$$

A''_i, A'''_i,... étant le résultat de la substitution de α'', α''',... au lieu de α' dans A'_i.

On peut donc considérer A_i comme une fonction d'une seule variable α, qui est nulle quelle que soit la valeur de α. Or on sait que, dans une telle fonction, les coefficients des diverses puissances sont nuls; donc tous les coefficients de A_i, lesquels ne sont autre chose que ceux de u_i, sont nuls, et, par conséquent aussi, tous ceux de F. Ce qu'il fallait démontrer.

Donc les deux extrémités de chaque diamètre du cercle qui a pour rayon $\sqrt{\frac{1}{Sk_i} Sk_i(a_i^2 + b_i^2)}$ jouissent de la propriété énoncée ci-dessus. On pouvait s'attendre à cette indétermination; car, en tirant des droites du point O à l'origine et aux deux points trouvés, la somme des carrés de ces dernières est égale au carré de la première, plus deux fois le carré du rayon, d'après un théorème bien connu de géométrie élémentaire.

En faisant $k_i = 1$, on a la proposition XI.

3. La proposition X, k_i étant quelconque, et la proposition IX, k_i étant égal à l'unité, s'énoncent en disant qu'on peut trouver un point A, tel que l'on ait

$$\begin{aligned} & k_1\overline{OA_1}^2 + k_2\overline{OA_2}^2 + k_3\overline{OA_3}^2 + \ldots + k_m\overline{OA_m}^2 \\ = {} & k_1\overline{AA_1}^2 + k_2\overline{AA_2}^2 + k_3\overline{AA_3}^2 + \ldots + k_m\overline{AA_m}^2 + (k_1 + k_2 + \ldots + k_m)\overline{OA}^2. \end{aligned}$$

Ce point n'est autre chose que le centre des forces parallèles k_i appliquées aux points A_i.

Stewart a démontré ce théorème dans deux cas très-particuliers, savoir: 1° quand les points donnés sont les sommets d'une portion de polygone régulier; 2° quand ce polygone est complet. Cela forme l'objet des propositions VII et IV. Alors, en appelant ρ la distance de A au centre de la circonférence sur laquelle se trouvent les sommets, et R le rayon, la quantité constante qui figure dans le second membre de l'équation ci-dessus est égale à $m(R^2 - \rho^2)$. Elle se réduit à mR^2 pour un polygone complet. On suppose $k_i = 1$.

4. Soit maintenant $n = 2$. Il s'agit de trouver trois points A'_1, A'_2, A'_3, tels que l'on ait

$$\frac{k_1\overline{OA_1}^4 + k_2\overline{OA_2}^4 + k_3\overline{OA_3}^4 + \ldots + k_m\overline{OA_m}^4}{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_m} = \frac{\overline{OA'_1}^4 + \overline{OA'_2}^4 + \overline{OA'_3}^4}{3},$$

quel que soit le point O. Stewart annonce, dans sa proposition XXXIII, que cela est toujours possible. Je vais montrer que, sur ce point, il est tombé dans l'erreur.

Pour simplifier les calculs, j'admettrai que les axes des coordonnées

sont choisis de manière à satisfaire aux trois équations

$$\mathrm{S}k_i a_i = 0, \quad \mathrm{S}k_i b_i = 0, \quad \mathrm{S}k_i a_i b_i = 0.$$

Il existe toujours un système, en général unique, d'axes rectangulaires jouissant de cette propriété. Toutefois, l'origine peut être située à l'infini lorsque l'on a $\mathrm{S}k_i = 0$, supposition que nous avons écartée au n° **1**. Cette recherche, analogue à celle du centre et des axes principaux d'une ligne du second ordre, donne lieu à une discussion et à des remarques tout à fait semblables. Une autre simplification résulte de ce que les équations obtenues en égalant à zéro les coefficients de x^2 et de y^2 donnent

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2.$$

Cela posé, les équations à résoudre sont les suivantes :

$$(1) \qquad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0,$$

$$(2) \qquad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0,$$

$$(3) \qquad \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 = 0,$$

$$(4) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2,$$

$$(5) \qquad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2,$$

$$(6) \quad \xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \xi_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \xi_3(\xi_3^2 + \eta_3^2) = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i(a_i^2 + b_i^2),$$

$$(7) \quad \eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \eta_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \eta_3(\xi_3^2 + \eta_3^2) = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i(a_i^2 + b_i^2),$$

$$(8) \quad (\xi_1^2 + \eta_1^2)^2 + (\xi_2^2 + \eta_2^2)^2 + (\xi_3^2 + \eta_3^2)^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i(a_i^2 + b_i^2)^2.$$

Comme elles sont au nombre de huit, tandis qu'il n'y a que six inconnues, il s'ensuit que l'élimination de celles-ci fournira deux équations de condition entre les quantités connues, et le théorème ne pourra être vrai si ces équations ne se réduisent pas à des identités. C'est donc par l'examen de cette circonstance que la question sera résolue.

Des équations (2), (3) et (5) je tire

$$\eta_1^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_ib_i^2\cdot\left[\frac{(\xi_3-\xi_2)^2}{(\xi_3-\xi_2)^2+(\xi_2-\xi_1)^2+(\xi_1-\xi_3)^2}\right];$$

d'un autre côté, les équations (1) et (4) donnent

$$(\xi_3-\xi_2)^2 = 2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_ia_i^2 - 3\xi_1^2,$$

$$(\xi_2-\xi_1)^2 = 2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_ia_i^2 - 3\xi_3^2,$$

$$(\xi_1-\xi_3)^2 = 2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_ia_i^2 - 3\xi_2^2,$$

d'où

$$(\xi_3-\xi_2)^2+(\xi_2-\xi_1)^2+(\xi_1-\xi_3)^2 = 3\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_ia_i^2;$$

par conséquent, on a

$$\eta_1^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_ib_i^2\cdot\frac{2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_ia_i^2 - 3\xi_1^2}{3\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_ia_i^2},$$

et il vient

$$\xi_1^2+\eta_1^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_ib_i^2 + \left(1-\frac{\mathrm{S}k_ib_i^2}{\mathrm{S}k_ia_i^2}\right)\xi_1^2.$$

On trouverait de même

$$\xi_2^2+\eta_2^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_ib_i^2 + \left(1-\frac{\mathrm{S}k_ib_i^2}{\mathrm{S}k_ia_i^2}\right)\xi_2^2$$

et

$$\xi_3^2+\eta_3^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_ib_i^2 + \left(1-\frac{\mathrm{S}k_ib_i^2}{\mathrm{S}k_ia_i^2}\right)\xi_3^2.$$

Au moyen de ces expresssions, l'équation (8) devient, toutes réductions faites,

$$\xi_1^4+\xi_2^4+\xi_3^4 = \frac{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i(a_i^2+b_i^2)^2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_ia_i^2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_ib_i^2}{\left(1-\frac{\mathrm{S}k_ib_i^2}{\mathrm{S}k_ia_i^2}\right)^2}.$$

Or on a identiquement

$$\begin{aligned}\xi_1^4+\xi_2^4+\xi_3^4 &= (\xi_1+\xi_2+\xi_3)(\xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3)\\ &-(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1)(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)+\xi_1\xi_2\xi_3(\xi_1+\xi_2+\xi_3).\end{aligned}$$

Le premier et le troisième termes du second membre sont nuls en vertu de l'équation (1). De l'égalité ci-dessus démontrée,

$$(\xi_3 - \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\xi_1 - \xi_3)^2 = 3 \cdot \frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i a_i^2,$$

on tire

$$\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i a_i^2;$$

par suite, on a aussi

$$\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i a_i \right)^2.$$

Cette nouvelle expression de $\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4$ doit être égale à celle déjà obtenue; de là l'équation de condition

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i a_i^2 \right)^2 = \frac{\frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i (a_i^2 + b_i^2)^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i a_i^2 \cdot \frac{3}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i b_i^2}{\left(1 - \frac{\mathrm{S}k_i b_i^2}{\mathrm{S}k_i a_i^2}\right)^2},$$

laquelle peut se mettre sous la forme plus symétrique

$$\frac{1}{2} (\mathrm{S}k_i a_i^2 - \mathrm{S}k_i b_i^2)^2 = \frac{\mathrm{S}k_i}{3} \mathrm{S}k_i (a_i^2 + b_i^2)^2 - \frac{4}{3} \mathrm{S}k_i a_i^2 . \mathrm{S}k_i b_i^2.$$

Il est facile de s'assurer qu'en général elle ne se vérifie pas. Supposons, par exemple, comme Stewart dans sa proposition XXXII, que l'on ait $k_i = 1$, et que, de plus, les points donnés soient les quatre sommets d'un losange dont les diagonales $2a$, $2b$ se confondent avec les axes des coordonnées. Alors on a $m = 4$ et

$$\mathrm{S}a_i = 0, \quad \mathrm{S}b_i = 0, \quad \mathrm{S}a_i b_i = 0, \quad \mathrm{S}a_i^2 = 2a^2, \quad \mathrm{S}b_i^2 = 2b^2,$$
$$\mathrm{S}a_i(a_i^2 + b_i^2) = 0, \quad \mathrm{S}b_i(a_i^2 + b_i^2) = 0, \quad \mathrm{S}(a_i^2 + b_i^2) = 2(a^4 + b^4).$$

Pour que le théorème fût vrai, il faudrait qu'on eût

$$\frac{1}{2} (2a^2 - 2b^2)^2 = \frac{4}{3} \cdot 2(a^4 + b^4) - \frac{4}{3} \cdot 2a^2 . 2b^2,$$

c'est-à-dire $a = b$, ou que le losange fût un carré.

5. Quand la condition ci-dessus est remplie, on construit sans peine les équations du troisième degré, qui ont pour racines les inconnues

ξ_1, ξ_2, ξ_3 et η_1, η_2, η_3. Car, d'abord, les sommes $\xi_1+\xi_2+\xi_3$, $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$ font partie des données du problème; ensuite, l'équation (6) devient, par l'élimination de η_1, η_2, η_3,

$$\xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3=\frac{\dfrac{3}{Sk_i}Sk_ia_i(a_i^2+b_i^2)}{1-\dfrac{Sk_ib_i^2}{Sk_ia_i^2}}.$$

D'ailleurs on a identiquement

$$\xi_1\xi_2\xi_3=\frac{1}{3}\left[\begin{array}{l}(\xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3)-(\xi_1+\xi_2+\xi_3)(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)\\ +(\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_2)(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\end{array}\right],$$

ou simplement, en vertu de la relation $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$,

$$\xi_1\xi_2\xi_3=\frac{1}{3}(\xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3)=\frac{1}{3}\,\frac{\dfrac{3}{Sk_i}Sk_ia_i(a_i^2+b_i^2)}{1-\dfrac{Sk_ib_i^2}{Sk_ia_i^2}}.$$

Si l'on se rappelle enfin qu'on a trouvé ci-dessus,

$$\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1=-\frac{1}{2}\,\frac{3}{Sk_i}Sk_ia_i^2,$$

il vient, pour l'équation cherchée,

$$\xi^3-\frac{1}{2}\,\frac{3}{Sk_i}Sk_ia_i^2.\xi+\frac{1}{3}\,\frac{\dfrac{3}{Sk_i}Sk_ia_i(a_i^2+b_i^2)}{1-\dfrac{Sk_ib_i^2}{Sk_ia_i^2}}=0.$$

On obtiendrait de même pour l'équation dont les racines sont η_1, η_2, η_3,

$$\eta^3-\frac{1}{2}\,\frac{3}{Sk_i}Sk_ib_i^2.\eta-\frac{1}{3}\,\frac{\dfrac{3}{Sk_i}Sk_ib_i(a_i^2+b_i^2)}{1-\dfrac{Sk_ia_i^2}{Sk_ib_i^2}}=0.$$

6. Dans le cas particulier où les points donnés A_1, A_2,..., A_m sont les sommets d'un polygone régulier, et les coefficients k_i égaux à l'unité, l'équation de condition est toujours satisfaite. Nommons, en effet, R le rayon du cercle circonscrit au polygone; on trouve

$$\frac{3}{Sk_i}Sa_i^2=\frac{3}{2}R^2,\quad \frac{3}{Sk_i}Sb_i^2=\frac{3}{2}R^2,\quad \frac{3}{Sk_i}S(a_i^2+b_i^2)^2=3R^4,$$

et cette équation devient identique par la substitution de ces valeurs.

Les quantités Sa_i^2, Sb_i^2 étant égales entre elles, les calculs du n° **4** donnent la relation

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 = \xi_3^2 + \eta_3^2 = R^2,$$

d'où il résulte que les points cherchés sont sur la circonférence de rayon R circonscrite au polygone. De plus on a, pour le carré des côtés du triangle dont ces points sont les sommets,

$$\begin{aligned}
\overline{A'_1 A'_2}^2 &= (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 = 3R^2,\\
\overline{A'_2 A'_3}^2 &= (\xi_3 - \xi_2)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2 = 3R^2,\\
\overline{A'_3 A'_1}^2 &= (\xi_1 - \xi_3)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 = 3R^2;
\end{aligned}$$

par conséquent, ce triangle est équilatéral.

Sa position est indéterminée, car le produit $\xi_1\xi_2\xi_3$ ou $\eta_1\eta_2\eta_3$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Ces conséquences ont été déduites par Stewart de sa proposition XXVII, où il fait connaître la somme

$$\overline{OA}_1^4 + \overline{OA}_2^4 + \overline{OA}_3^4 + \ldots + \overline{OA}_m^4.$$

Elle a pour expression

$$mR^4 + 4mR^2\rho^2 + m\rho^4,$$

ρ étant la distance du point O à l'origine. En faisant $\rho = R$, c'est-à-dire en prenant le point O sur la circonférence, cette somme devient égale à $6mR^4$; c'est ce que la proposition XXVI a pour objet d'établir. Je montrerai, au n° **8**, comment on obtient ces formules, n étant quelconque.

7. Le théorème énoncé au n° **1** n'est donc vrai, pour $n = 2$, que dans des cas particuliers, et moyennant une condition parfaitement définie, provenant de ce que le nombre des équations à résoudre est supérieur à celui des inconnues. Pour $n = 3$, le nombre de ces équations s'élève à quinze, tandis qu'il n'y a que huit inconnues. Pour

$n = 4$, la différence est encore plus grande, et au delà elle croît très-rapidement. On est donc autorisé à penser que le théorème énoncé par Stewart comme ayant lieu lorsque l'exposant n est quelconque, n'est généralement vrai que dans le cas où cet exposant se réduit à l'unité.

Je signalerai en passant une curieuse relation qui existe entre les distances mutuelles des deux groupes de m points et de $n+1$ points, pour lesquels la relation dont il s'agit se vérifie, les coefficients k_i étant égaux à l'unité.

Faisons coïncider le point O successivement avec $A_1, A_2,\ldots, A_m$, puis avec $A'_1, A'_2,\ldots, A'_{n+1}$; on trouve que la somme des puissances $2n$ de ces distances dans le premier groupe est à la somme des puissances $2n$ des distances analogues dans le second groupe, comme m^2 est à $(n+1)^2$.

8. Le théorème du n° **1** se vérifie toujours lorsque, les coefficients k_i étant égaux à l'unité, les points $A_1, A_2,\ldots, A_m$ sont les sommets d'un polygone régulier. Soient toujours R le rayon du cercle circonscrit et ρ la distance de son centre au point O. Nommons, de plus, φ l'angle compris entre cette droite et OA_2; nous aurons

$$\begin{aligned}
\overline{OA}_1^2 &= R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\varphi,\\
\overline{OA}_2^2 &= R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{m}\right),\\
\overline{OA}_3^2 &= R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\left(\varphi + 2\cdot\frac{2\pi}{m}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overline{OA}_n^2 &= R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\left[\varphi + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right].
\end{aligned}$$

Élevons les deux membres de chacune de ces égalités à la puissance n, et faisons la somme des résultats obtenus, en remarquant que l'on a pour des valeurs de $2i+1$ moindres que m,

$$\cos^{2i+1}\varphi + \cos^{2i+1}\left(\varphi + \frac{2\pi}{m}\right)$$
$$+ \cos^{2i+1}\left(\varphi + 2\cdot\frac{2\pi}{m}\right) + \ldots + \cos^{2i+1}\left[\varphi + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right] = 0;$$

et, pour des valeurs de $2i$ moindres que m,

$$\cos^{2i}\varphi + \cos^{2i}\left(\varphi + \frac{2\pi}{m}\right) + \cos^{2i}\left(\varphi + 2\cdot\frac{2\pi}{m}\right) + \ldots + \cos^{2i}\left[\varphi + (n-1)\frac{2\pi}{m}\right] = \frac{m}{2^{2i}}\cdot\frac{2i(2i-1)(2i-2)\ldots(i+1)}{1.2.3\ldots i},$$

il vient

$$\overline{\mathrm{OA}}_1^{2n} + \overline{\mathrm{OA}}_2^{2n} + \overline{\mathrm{OA}}_3^{2n} + \ldots + \overline{\mathrm{OA}}_m^{2n}$$

$$= m\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{R}^2+\rho^2)^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2}(\mathrm{R}^2+\rho^2)^{n-2}\mathrm{R}^2\rho^2 \\ + \frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(\mathrm{R}^2+\rho^2)^{n-4}\mathrm{R}^4\rho^4 \\ + \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6}(\mathrm{R}^2+\rho^2)^{n-6}\mathrm{R}^6\rho^6+\ldots \end{array}\right\}.$$

Si l'on développe les puissances de $\mathrm{R}^2+\rho^2$, on trouve que le second membre se réduit à

$$m\left[\begin{array}{l}\mathrm{R}^{2n} + \mathrm{P}_1 n\mathrm{R}^{2n-2}\rho^2 + \mathrm{P}_2\frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{R}^{2n-4}\rho^4 \\ \qquad + \mathrm{P}_3\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\mathrm{R}^{2n-6}\rho^6 + \ldots\end{array}\right],$$

en désignant par P_i la quantité

$$1 + i(n-i) + \frac{i(i-1)}{1.2}\cdot\frac{(n-i)(n-i-1)}{1.2} + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\cdot\frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{1.2.3}+\ldots,$$

dont la loi de formation est évidente.

La somme $\overline{\mathrm{OA}}_1^{2n} + \overline{\mathrm{OA}}_2^{2n} + \ldots + \overline{\mathrm{OA}}_m^{2n}$ est donc, pour une même valeur de l'exposant n, proportionnelle au nombre des côtés du polygone; ce qu'il fallait faire voir.

Stewart présente, dans l'énoncé de sa proposition XLII, cette même somme sous la forme que voici :

$$m\left[\mathrm{R}^{2n} + n^2\mathrm{R}^{2n-2}\rho^2 + \frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2}\mathrm{R}^{2n-4}\rho^4 + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2.2^2.3^2}\mathrm{R}^{2n-6}\rho^6+\ldots\right],$$

de sorte qu'on aurait

$$P_i = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}.$$

C'est ce qui a lieu effectivement, car le carré de la distance du point O à l'un des sommets du polygone se décompose en deux facteurs imaginaires $R - \rho\alpha$, $R - \rho\alpha'$, qu'on obtient en faisant

$$\alpha = \cos\left(\varphi + \frac{2i\pi}{m}\right) + \sqrt{-1}.\sin\left(\varphi + \frac{2i\pi}{m}\right)$$

et

$$\alpha' = \cos\left(\varphi + \frac{2i\pi}{m}\right) - \sqrt{-1}.\sin\left(\varphi + \frac{2i\pi}{m}\right).$$

Développant les puissances $n^{\text{ièmes}}$ de ces deux facteurs, et effectuant le produit, on trouve pour le coefficient de $R^{2n-2i}\rho^{2i}$,

$$\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2\ldots(n-i+1)^2}{1^2.2^2.3^2\ldots i^2}\alpha^i\alpha'^i + V,$$

la lettre V désignant des termes où les exposants de α et de α' sont inégaux. Or le produit $\alpha\alpha'$ est égal à l'unité, et l'on sait que la somme des puissances entières de α et α' est nulle, tant que ces puissances sont au-dessous du degré m. Donc le coefficient de $R^{2n-2i}\rho^{2i}$ est bien $\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2\ldots(n-i+1)^2}{1^2.2^2\,3^2\ldots i^2}$, et on a l'identité

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i} = 1 + i(n-i) + \frac{i(i-1)}{1.2}\frac{(n-i)(n-i+1)}{1.2} + \ldots.$$

Quand le point O est sur la circonférence circonscrite au polygone, on a

$$\overline{OA_1}^{2n} + \overline{OA_2}^{2n} + \ldots + \overline{OA_m}^{2n} = m\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1\,2.3\ldots n}.\,R^{2n},$$

attendu que les expressions ci-dessus de $\overline{OA_1}^2$, $\overline{OA_2}^2, \ldots, \overline{OA_m}^2$ rentrent alors dans la forme $4R^2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{i\pi}{m}\right)$, et que la somme des puissances $2n < m$ des sinus des arcs $\frac{\varphi}{2}$, $\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{m}$, $\frac{\varphi}{2} + \frac{2\pi}{m}, \ldots$, $\frac{\varphi}{2} + (m-1)\frac{\pi}{m}$, est égale à $\frac{m}{2^{2n}}.\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}$.

Par l'énoncé de la proposition XLI, Stewart assigne à la somme $\overline{OA_1}^{2n} + \overline{OA_2}^{2n} + \ldots + \overline{OA_m}^{2n}$ la forme $m \cdot \frac{1\ 3.5.7\ldots(2n-1)}{1.2.3.4\ldots n} 2^n R^{2n}$. Son identité avec la précédente se vérifie pour $n = 1$, $n = 2$, etc. Supposons qu'elle soit établie pour la valeur quelconque $n - 1$, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{1.2.3.4\ldots(n-1)} 2^{n-1} = \frac{(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)n}{1.2\ldots(n-2)(n-1)};$$

il vient, en multipliant les deux membres par $\frac{2(2n-1)}{n}$,

$$\frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)(2n-1)}{1.2.3.4\ldots(n-1)n} 2^n = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n};$$

par conséquent, cette identité a lieu quelle que soit la valeur de n.

DEUXIÈME THÉORÈME GÉNÉRAL.

9. Soient L_1, L_2, L_3,..., L_m m droites données, parallèles entre elles ou passant par un même point, et k_1, k_2,.., k_m autant de coefficients également donnés, n étant un nombre moindre que m; on peut trouver, dit Stewart dans sa proposition XLVII, $n + 1$ autres droites L'_1, L'_2,..., L'_{n+1} telles qu'il y ait, entre les perpendiculaires OP_1, OP_2,..., OP_m abaissées d'un point O, pris arbitrairement, sur les premières, et les perpendiculaires $\overline{OP'_1}$, $\overline{OP'_2}$,..., $\overline{OP'_{n+1}}$ abaissées du même point sur les droites trouvées, la relation

$$\frac{k_1\overline{OP_1}^{2n} + k_2\overline{OP_2}^{2n} + \ldots + k_m\overline{OP_m}^{2n}}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \frac{\overline{OP'_1}^{2n} + \overline{OP'_2}^{2n} + \ldots + \overline{OP'_{n+1}}^{2n}}{n+1}.$$

En supposant tous les coefficients k_i égaux à l'unité et $n < m - 1$, on a la proposition XLVI. J'admettrai, comme au n° **1**, que la somme $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ est positive et différente de zéro; les droites L_i, L'_i ayant pour équations

$$y = a_i x + b_i, \quad y = \alpha_i x + \beta_i,$$

on a

$$\overline{OP_i}^2 = \frac{(y - a_i x + b_i)^2}{1 + a_i^2}, \quad \overline{OP'_i}^2 = \frac{(y - \alpha_i x - \beta_i)^2}{1 + \alpha_i^2},$$

expressions dans lesquelles x et y désignent les coordonnées du point O. Lorsque les droites L_i sont parallèles entre elles, on peut prendre pour axe des x une parallèle à leur commune direction, c'est-à-dire faire $a_i = 0$, et, par suite, écrire

$$\frac{\mathrm{S}_{i=1}^{i=m} k_i (y - b_i)^{2n}}{\mathrm{S}_{i=1}^{i=m} k_i} = \frac{\mathrm{S}_{i=1}^{i=n+1} \frac{(y - \alpha_i x - \beta_i)^{2n}}{(1+\alpha_i^2)^n}}{n+1}.$$

Si les droites L_i passent par un même point, on peut le choisir pour origine des coordonnées, et faire $b_i = 0$. La relation ci-dessus prend alors la forme

$$\frac{\mathrm{S}_{i=1}^{i=m} k_i \frac{(y - a_i x)^{2n}}{(1+a_i^2)^n}}{\mathrm{S}_{i=1}^{i=m} k_i} = \frac{\mathrm{S}_{i=1}^{i=n+1} \frac{(y - \alpha_i x - \beta_i)^{2n}}{(1+\alpha_i^2)^n}}{n+1}.$$

10. Pour satisfaire à la première de ces équations quelles que soient les valeurs des coordonnées x, y, il faut nécessairement supposer $\alpha_i = 0$; car, en faisant d'abord $y = 0$ et développant ensuite le second membre, on trouve, parmi les coefficients des diverses puissances de x, lesquelles doivent être nuls, la quantité

$$\frac{\alpha_1^{2n}}{(1+\alpha_1^2)^n} + \frac{\alpha_2^{2n}}{(1+\alpha_2^2)^n} + \ldots + \frac{\alpha_{n+1}^{2n}}{(1+\alpha_{n+1}^2)^{2n}},$$

qui ne devient nulle qu'en posant $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_{n+1} = 0$. Par conséquent, les droites cherchées L'_i sont nécessairement parallèles aux droites données, et les équations à résoudre pour trouver les valeurs des inconnues β_i sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n+1} &= \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i b_i, \\
\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_{n+1}^2 &= \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i b_i^2, \\
\beta_1^3 + \beta_2^3 + \ldots + \beta_{n+1}^3 &= \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i b_i^3, \\
\ldots & \ldots \\
\beta_1^{2n} + \beta_2^{2n} + \ldots + \beta_{n+1}^{2n} &= \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i} \mathrm{S}k_i b_i^{2n};
\end{aligned}$$

leur nombre s'élève à $2n$, tandis qu'il n'y a que $n+1$ inconnues. On peut donc s'attendre à trouver $n-1$ équations de condition. Je vais faire voir que le cas où l'on a $n=1$ est le seul qui donne lieu à une solution générale.

11. Pour plus de simplicité, je supposerai l'axe des x choisis de manière à satisfaire à la condition $\mathrm{S}k_i b_i = 0$, ce qui est toujours permis. Cela posé, les équations à résoudre sont, en faisant $n=1$,

$$\beta_1 + \beta_2 = 0,$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i^2;$$

elles donnent

$$\beta_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i^2}, \quad \beta_2 = \mp\sqrt{\frac{1}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i},$$

c'est-à-dire deux droites parallèles, également distantes de l'axe des x. Cette solution est ainsi complète.

On résoudrait non moins facilement le problème qui consiste à déterminer une droite L', telle qu'on ait

$$\frac{k_1\overline{\mathrm{OP}}_1^2 + k_2\overline{\mathrm{OP}}_2^2 + \ldots + k_m\overline{\mathrm{OP}}_m^2}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \overline{\mathrm{OP}}'^2 + \mathrm{C},$$

C désignant une constante. Un calcul très-simple donne pour la droite cherchée l'axe des x et $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{S}k_i b_i^2}{\mathrm{S}k_i}$.

C'est l'objet de la proposition XVIII quand les coefficients k_i sont quelconques, et de la proposition XIII quand ils sont égaux à l'unité.

12. Soit maintenant $n=2$; on a

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0,$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i^2,$$

$$\beta_1^3 + \beta_2^3 + \beta_3^3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i^3,$$

$$\beta_1^4 + \beta_2^4 + \beta_3^4 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i b_i^4,$$

et ces équations ne peuvent être résolues qu'à la condition de vérifier l'identité

$$\beta_1^4 + \beta_2^4 + \beta_3^4 = +(\beta_1^3 + \beta_2^3 + \beta_3^3)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$
$$-(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) + \beta_1\beta_2\beta_3(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3),$$

laquelle se réduit à

$$\beta_1^4 + \beta_2^4 + \beta_3^4 = -(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2),$$

en vertu de la relation

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

Or celle-ci donne

$$\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1 = -\frac{1}{2}(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2),$$

d'où

$$\beta_1^4 + \beta_2^4 + \beta_3^4 = \frac{1}{2}(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2\right)^2:$$

telle est l'équation de condition d'où dépend la possibilité de trouver un système de droites jouissant de la propriété contraire. Or cette équation ne se vérifie pas d'elle-même. Soient, par exemple,

$$b_1 = +2,\quad b_2 = +4,\quad b_3 = -5,\quad b_4 = +6,\quad b_5 = -7 \quad \text{et} \quad m = 5,$$

les coefficients k_i étant égaux à l'unité; avec ces données, on a

$$\mathrm{S}k_i b_i = 0.$$

Le premier membre est alors égal à $\frac{13782}{5}$, et le second à $\frac{15210}{5}$.

La proposition générale que nous examinons n'est donc vraie pour $n = 2$ que dans des cas particuliers.

13. En assignant à n des valeurs plus grandes, on parviendrait sans difficulté, par la méthode inverse des fonctions symétriques, à construire les équations de conditions relatives à chaque cas, et l'on verrait qu'elles ne se réduisent pas à des identités.

Un cas assez remarquable où ces conditions se vérifient toutes, est

celui où les m droites données passent par les sommets d'un polygone régulier de m côtés. Si l'on circonscrit à ce polygone une circonférence, et que dans celle-ci on inscrive un polygone régulier de $n+1$ côtés, les $n+1$ droites menées par les sommets parallèlement aux premières satisferont à la relation indiquée au n° **9**, pourvu que les deux polygones soient orientés convenablement. On suppose $k_i = 1$.

Soient R le rayon de la circonférence, p, φ les angles que font avec l'axe des x les rayons menés du centre aux sommets A_1, A'_1; on a d'abord, pour tous les exposants t moindres que $n+1$,

$$\frac{1}{n+1}\left[\begin{array}{l} \sin^t\varphi + \sin^t\left(\varphi + \frac{2\pi}{n+1}\right) \\ + \sin^t\left(\varphi + 2\cdot\frac{2\pi}{n+1}\right) + \ldots + \sin^t\left(\varphi + n\,\frac{2\pi}{n+1}\right) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{m}\left[\begin{array}{l} \sin^t p + \sin^t\left(p + \frac{2\pi}{m}\right) \\ + \sin^t\left(p + 2\cdot\frac{2\pi}{m}\right) + \ldots + \sin^t\left(p + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right) \end{array}\right].$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par R^t, et remarquant que l'on a

$$b_i^t = R^t \sin^t\left[p + (i-1)\frac{2\pi}{m}\right], \quad \beta_i^t = R^t \sin^t\left[\varphi + (i-1)\frac{2\pi}{n+1}\right],$$

on voit que les équations

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_{n+1} = \frac{n+1}{m}\,\mathrm{S}\,b_i,$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \ldots + \beta_{n+1}^2 = \frac{n+1}{m}\,\mathrm{S}\,b_i^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta_1^t + \beta_2^t + \beta_3^t + \ldots + \beta_{n+1}^t = \frac{n+1}{m}\,\mathrm{S}\,b_i^t,$$

sont satisfaites tant que l'exposant t demeure inférieur à $n+1$. Quand il atteint et dépasse cette limite, la quantité

$$\frac{1}{n+1}\left[\begin{array}{l} \sin^t\varphi + \sin^t\left(\varphi + \frac{2\pi}{n+1}\right) \\ + \sin^t\left(\varphi + 2\,\frac{2\pi}{n+1}\right) + \ldots + \sin^t\left(\varphi + n\,\frac{2\pi}{n+1}\right) \end{array}\right]$$

peut être mise sous la forme

$$T + V \cos (n + 1) \varphi,$$

ou

$$T + V \sin (n + 1) \varphi,$$

suivant que $n + 1$ est pair ou impair. T est une fonction de t; V dépend de n et de t, mais ne devient jamais infini. Tout cela découle d'une théorie connue, dans les détails de laquelle il n'est pas besoin d'entrer ici.

D'un autre côté, tant que l'exposant t est moindre que m, la quantité

$$\frac{1}{m}\left[\begin{array}{c} \sin^t p + \sin^t\left(p + \frac{2\pi}{m}\right) \\ + \sin^t\left(p + 2\cdot\frac{2\pi}{m}\right) + \ldots + \sin^t\left(p + (m-1)\frac{2\pi}{m}\right) \end{array}\right]$$

se réduit à t. Pour $t = m$ et $t > m$, elle prend la forme

$$T + U \cos mp,$$

ou

$$T + U \sin mp,$$

suivant que m est pair ou impair, U ne pouvant devenir infini. On rendra donc égales entre elles les deux quantités ci-dessus, en déterminant φ et p de manière à faire disparaître les termes contenant le sinus ou le cosinus des angles $(n - 1)\varphi$, mp; ce qui n'offre aucune difficulté, puisqu'il ne s'agit que de déterminer la valeur de φ pour laquelle on a $\cos (n + 1)\varphi = 0$, $n + 1$ étant pair, ou $\sin (n + 1)\varphi = 0$, $n + 1$ étant impair, et $\cos mp = 0$, m étant pair, ou $\sin mp = 0$, m étant impair.

14. Considérons présentement le cas où les droites données passent toutes par un même point. Il s'agit de reconnaître, comme on l'a indiqué au n° **9**, si l'on peut satisfaire à l'équation

$$\frac{\mathbf{S}_{i=1}^{i=m} k_i \frac{(y - a_i x)^{2n}}{(1 + a_i^2)^n}}{\mathbf{S}_{i=1}^{i=m} k_i} = \frac{\mathbf{S}_{i=1}^{i=n+1} \frac{(y - \alpha_i x - \beta_i)^{2n}}{(1 + \alpha_i^2)^n}}{n + 1},$$

quelles que soient les valeurs des coordonnées x, y; en faisant $x = 0$, $y = 0$, il vient

$$\frac{\beta_1^{2n}}{(1+\alpha_1^2)^n} + \frac{\beta_2^{2n}}{(1+\alpha_2^2)^n} + \ldots + \frac{\beta_{n+1}^{2n}}{(1+\alpha_{n+1}^2)^n} = 0,$$

équation qui exige qu'on ait $\beta_i = 0$. Par conséquent, les droites cherchées L'_i, quand elles existent, passent nécessairement par le point d'intersection des droites données L_i, lequel a été choisi pour origine.

Cela posé, les équations à résoudre sont les suivantes :

$$\frac{1}{(1+\alpha_1^2)^n} + \frac{1}{(1+\alpha_2^2)^n} + \ldots + \frac{1}{(1+\alpha_{n+1}^2)^n} = \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i} \mathbf{S} \frac{k_i}{(1+a_i^2)^n},$$

$$\frac{\alpha_1}{(1+\alpha_1^2)^n} + \frac{\alpha_2}{(1+\alpha_2^2)^n} + \ldots + \frac{\alpha_{n+1}}{(1+\alpha_{n+1}^2)^n} = \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i} \mathbf{S} \frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^n},$$

$$\frac{\alpha_1^2}{(1+\alpha_1^2)^n} + \frac{\alpha_2^2}{(1+\alpha_2^2)^n} + \ldots + \frac{\alpha_{n+1}^2}{(1+\alpha_{n+1}^2)^n} = \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i} \mathbf{S} \frac{k_i a_i^2}{(1+a_i^2)^n},$$

. . . .

$$\frac{\alpha_1^{2n}}{(1+\alpha_1^2)^n} + \frac{\alpha_2^{2n}}{(1+\alpha_2^2)^n} + \ldots + \frac{\alpha_{n+1}^{2n}}{(1+\alpha_{n+1}^2)^n} = \frac{n+1}{\mathrm{S}k_i} \mathbf{S} \frac{k_i a_i^{2n}}{(1+a_i^2)^n}.$$

De même que dans le cas des droites parallèles, on a, en général, plus d'équations que d'inconnues, et, par suite, il y a lieu de s'attendre à rencontrer des impossibilités analogues.

15. Pour faciliter les calculs auxquels on va être conduit, je supposerai que l'axe des x est dirigé de manière qu'on ait

$$\mathbf{S} \frac{k_i a_i}{1+a_i^2} = 0.$$

Cela est toujours possible; car soit v la tangente de l'angle que fait l'axe nouveau avec celui pour lequel cette condition n'est pas remplie. On posera

$$\mathbf{S} k_i \frac{\dfrac{a_i - v}{1 + a_i v}}{1 + \left(\dfrac{a_i - v}{1 + a_i v}\right)^2} = 0,$$

d'où il résulte

$$v^2 + \frac{\mathrm{S}\, k_i \left(\frac{1-a_i^2}{1+a_i^2}\right)}{\mathrm{S}\, \frac{k_i a_i}{1+a_i^2}}\, v - 1 = 0,$$

équation du second degré dont les deux racines sont réelles. La valeur du dernier terme montre que les deux droites qui répondent à la question sont perpendiculaires l'une à l'autre; ce que l'on pouvait d'ailleurs prévoir à priori, car la relation

$$\mathrm{S}\, \frac{k_i a_i}{1+a_i^2} = 0$$

ne change pas lorsqu'on y remplace a_i par $-\frac{1}{a_i}$.

16. Cela posé, faisons $n = 1$. On a ainsi la proposition XIX de Stewart, et la proposition XV quand les coefficients k_i se réduisent à l'unité. Les équations à résoudre sont

$$\frac{1}{1+\alpha_1^2} + \frac{1}{1+\alpha_2^2} = \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\, \mathrm{S}\, \frac{k_i}{1+a_i^2},$$

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_2^2} = 0,$$

$$\frac{\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{1+\alpha_2^2} = \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\, \mathrm{S}\, \frac{k_i a_i^2}{1+a_i^2},$$

c'est-à-dire qu'il y en trois pour deux inconnues. Mais ces équations se réduisent à deux; car, en ajoutant membre à membre la première et la troisième, on obtient une identité.

La deuxième devient, en chassant les dénominateurs,

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 \alpha_2) = 0;$$

en égalant à zéro le facteur $\alpha_1 + \alpha_2$, on trouve deux droites faisant avec l'axe des x des angles égaux, qui ont pour cosinus $\sqrt{\frac{1}{\mathrm{S}k_i}\, \mathrm{S}\, \frac{k_i}{1+a_i^2}}$. Cette solution est donc complète.

Si l'on égale à zéro le second facteur $1 + \alpha_1 \alpha_2$, il vient la double condition

$$\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\, \mathrm{S}\, \frac{k_i}{1+a_i^2} = \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\, \mathrm{S}\, \frac{k_i a_i^2}{1+a_i^2} = 1.$$

Or, si l'on a

$$\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i}{1+a_i^2}=1,$$

on a aussi

$$\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i a_i^2}{1+a_i^2}=1,$$

à cause de l'identité

$$\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i(1+a_i^2)}{1+a_i^2}=2;$$

donc une seule de ces conditions est nécessaire pour que le deuxième facteur $1+\alpha_1\alpha_2$ soit propre à résoudre la question. Celle-ci est alors indéterminée, et tout système de deux droites rectangulaires satisfait à la relation

$$\frac{\overline{\mathrm{OP}'_1}^2+\overline{\mathrm{OP}'_2}^2}{2}=\frac{k_1\overline{\mathrm{OP}_1}^2+k_2\overline{\mathrm{OP}_2}^2+\ldots+k_m\overline{\mathrm{OP}_m}^2}{k_1+k_2+\ldots+k_m}.$$

Cette remarque devient intuitive lorsqu'on prend le soin de la vérifier sur une figure.

17. L'hypothèse $n=2$ répond à la proposition XXXVI; elle donne naissance à cinq équations :

$$\frac{1}{(1+\alpha_1^2)^2}+\frac{1}{(1+\alpha_2^2)^2}+\frac{1}{(1+\alpha_3^2)^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2},$$

$$\frac{\alpha_1}{(1+\alpha_1^2)^2}+\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_2^2)^2}+\frac{\alpha_3}{(1+\alpha_3^2)^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i a_i}{(1+\alpha_i^2)^2},$$

$$\frac{\alpha_1^2}{(1+\alpha_1^2)^2}+\frac{\alpha_2^2}{(1+\alpha_2^2)^2}+\frac{\alpha_3^2}{(1+\alpha_3^2)^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i a_i^2}{(1+a_i^2)^2},$$

$$\frac{\alpha_1^3}{(1+\alpha_1^2)^2}+\frac{\alpha_2^3}{(1+\alpha_2^2)^2}+\frac{\alpha_3^3}{(1+\alpha_3^2)^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i a_i^3}{(1+a_i^2)^2},$$

$$\frac{\alpha_1^4}{(1+\alpha_1^2)^2}+\frac{\alpha_2^4}{(1+\alpha_2^2)^2}+\frac{\alpha_3^4}{(1+\alpha_3^2)^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathbf{S}\frac{k_i a_i^4}{(1+a_i^2)^2}.$$

En doublant tous les termes de la troisième, et ajoutant membre à membre avec la première et la cinquième, on tombe sur une identité; donc le nombre de ces équations est réduit à quatre, et toute la question est de savoir si elles ne sont pas susceptibles d'être réduites à un nombre moindre.

Pour plus de simplicité, j'ajoute membre à membre la première et la troisième, puis la deuxième et la quatrième, de sorte que le système à traiter est celui-ci :

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2^2}+\frac{\alpha_3}{1+\alpha_3^2}=0,$$

$$\frac{1}{1+\alpha_1^2}+\frac{1}{1+\alpha_2^2}+\frac{1}{1+\alpha_3^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathop{\mathrm{S}}\frac{k_i}{1+a_i^2},$$

$$\frac{1}{(1+\alpha_1^2)^2}+\frac{1}{(1+\alpha_2^2)^2}+\frac{1}{(1+\alpha_3^2)^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathop{\mathrm{S}}\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2},$$

$$\frac{\alpha_1}{(1+\alpha_1^2)^2}+\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_2^2)^2}+\frac{\alpha_3}{(1+\alpha_3^2)^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathop{\mathrm{S}}\frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^2}.$$

Actuellement posons

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-p,\quad \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=q,\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-r,$$

de sorte que

$$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0$$

soit l'équation qui a pour racines α_1, α_2, α_3. Si l'on réduit au même dénominateur le premier membre de chacune des équations ci-dessus, les dénominateurs obtenus, ainsi que les numérateurs, sont des fonctions symétriques des inconnues α_1, α_2, α_3, et, par conséquent, s'expriment au moyen des coefficients p, q, r. Voici les résultats du calcul :

$$\frac{3r-p-(r+p)q}{(q-1)^2+(r-p)^2}=0,$$

$$\frac{(q-1)(q-3)-2p(r-p)}{(q-1)^2+(r-p)^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathop{\mathrm{S}}\frac{k_i}{1+a_i^2},$$

$$\frac{[(q-1)(q-3)-2p(r-p)]^2+2(2q-p^2-3)[(q-1)^2+(r-p)^2]}{[(q-1)^2+(r-p)^2]^2}$$
$$=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathop{\mathrm{S}}\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2},$$

$$\frac{(q-1)(p+3pq+3qr-q^2r-6r)+(r-p)(p^2q-pr+3pqr-pr^2)}{[(q-1)^2+(r-p)^2]^2}$$
$$=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathop{\mathrm{S}}\frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^2}.$$

On satisfait à la première de ces équations en égalant le numérateur à zéro ou le dénominateur à l'infini ; mais cette dernière solution doit être écartée, car la quantité $(q-1)^2+(r-p)^2$ ne peut devenir infinie que si une ou plusieurs des inconnues α_1, α_2, α_3 sont elles-

mèmes infinies. Or le premier membre de l'équation

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2^2}+\frac{\alpha_3}{1+\alpha_3^2}=0$$

peut être mis sous la forme $\dfrac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\alpha_1}+\dfrac{1}{\frac{1}{\alpha_2}+\alpha_2}+\dfrac{1}{\frac{1}{\alpha_3}+\alpha_3}$, et alors on voit qu'en supposant α_3 infini, le terme en α_3 disparaît. La même chose a lieu pour les trois autres équations; de sorte qu'il reste seulement deux inconnues α_1, α_2, pour lesquelles on a, comme dans le numéro qui précède,

$$(\alpha_1+\alpha_2)(1+\alpha_1\alpha_2)=0,$$

et l'on arrive, en faisant soit $\alpha_1\alpha_2=0$, soit $1+\alpha_1\alpha_2=0$, à des conditions particulières qui ne se réduisent pas à des identités. Il en serait encore ainsi en supposant infinies deux des inconnues ou même toutes les trois.

Il faut donc poser

$$3r-p-(r+p)q=0,$$

d'où

$$p=\left(\frac{3-q}{1+q}\right)r.$$

Cette valeur, substituée dans la seconde équation et dans les suivantes, donne :

$$\frac{(q-1)(q-3)\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right]}{(q-1)^2\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right]}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathbf{S}\,\frac{k_i}{1+a_i^2},$$

$$\frac{\frac{-r(q-1)^3(q+3)}{(1+q)}\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right]}{(q-1)^4\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right]^2}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathbf{S}\,\frac{k_ia_i}{(1+a_i^2)^2},$$

$$\frac{(q-1)^2(q-3)^2\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right]^2+2(q-1)^2\left[2q-3-\left(\frac{3-q}{1+q}\right)^2r^2\right]\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right]}{(q-1)^4\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right]^2}$$
$$=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathbf{S}\,\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2}.$$

J'ai laissé en évidence tous les facteurs dans lesquels se décomposent

les numérateurs et les dénominateurs, car il faut prouver, avant de les supprimer, qu'ils sont étrangers à la question.

Si l'on fait d'abord $q=1$, la vraie valeur de $\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i}{1+a_i^2}$ est infinie; supposition inadmissible, attendu que a_i étant réel, $1+a_i^2$ ne saurait devenir nul. $q-1$ ne peut d'ailleurs être infini, car l'une au moins des inconnues α_1, α_2, α_3 le serait; supposition que nous avons déjà écartée.

L'hypothèse $1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}=0$ rendrait infinie la quantité $\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i}{1+a_i^2}$, ce qui ne saurait avoir lieu, attendu que $\frac{a_i}{1+a_i^2}$ n'est infini pour aucune valeur réelle de a_i. On ne peut pas davantage faire $1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}=\infty$, car il faudrait supposer $q=\infty$ ou $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\infty$, ce que nous avons démontré inadmissible; ou $q=-1$, r n'étant pas nul, c'est-à-dire $p=\infty$, ce qui est également inadmissible. Enfin r et $q+1$ ne pourraient être nuls ensemble, car il faudrait que l'une au moins des racines, α_3 par exemple, fût égale à zéro, et alors on aurait

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2}+\frac{\alpha_1}{1+\alpha_2^2}=0 \quad \text{ou} \quad (\alpha_1+\alpha_2)(1+\alpha_1\alpha_2)=0,$$

ce qui donnerait lieu, comme on l'a vu ci-dessus, à des conditions qui ne se vérifient pas d'elles-mêmes.

On a donc finalement

$$\frac{q-3}{q-1}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i}{1+a_i^2},$$

$$\frac{r(q+3)}{(q-1)(1+q)\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right]}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^2},$$

$$\frac{(q-3)^2\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right]+2\left[2q-3-\left(\frac{3-q}{1+q}\right)^2 r^2\right]}{(q-1)^2\left[1+\frac{4r^2}{(1+q)^2}\right]}=\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2}.$$

De la première de ces équations, je tire

$$q=\frac{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i}{1+a_i^2}-3}{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i}{1+a_i^2}-1},$$

et, par la substitution de cette valeur dans la deuxième et dans la troisième, il n'y reste plus que le coefficient inconnu r, qu'il devient aisé d'éliminer. On obtient ainsi l'équation de condition

$$\left[\left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i}{1+a_i^2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2}\right]^2$$
$$-\left(2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i}{1+a_i^2}-3\right)\left[\left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i}{1+a_i^2}\right)^2 - 2\cdot\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2}\right]$$
$$+4\cdot\left[\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}\frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^2}\right]^2 = 0.$$

Montrons, par un exemple, que cette relation n'est pas une identité. Soit $k_i = 1$, ce qui est le cas de la proposition XXXV, et

$$a_1 = \frac{1}{2},\quad a_2 = \frac{1}{3},\quad a_3 = -\frac{1}{2},\quad a_4 = -\frac{1}{3},$$

et, par conséquent,

$$\frac{3}{\mathrm{S}k_i} = \frac{3}{4},$$

$$\mathrm{S}\frac{k_i a_i}{1+a_i^2} = 0,\quad \mathrm{S}\frac{k_i}{1+a_i^2} = \frac{34}{10},\quad \mathrm{S}\frac{k_i a_i}{(1+a_i^2)^2} = 0,\quad \mathrm{S}\frac{k_i}{(1+a_i^2)^2} = \frac{29}{10};$$

on trouve pour le premier membre 0.11300625 au lieu de zéro. De ce qui vient d'être démontré et de ce qui l'a été au n° **12**, on conclut que les propositions XXXV et XXXVI ne sont pas vraies.

18. Quand les m droites données forment des angles égaux entre eux, ayant pour amplitude $\frac{\pi}{m}$, k_i étant égal à l'unité, si l'on appelle ρ la longueur de la droite qui va du point O à l'origine, p, φ les angles que font avec celle-ci les droites L_1, L'_1, on a

$$\frac{1}{n+1}\left[\begin{array}{l}\sin^{2n}\varphi + \sin^{2n}\left(\varphi + \frac{\pi}{n+1}\right)\\ + \sin^{2n}\left(\varphi + 2\cdot\frac{\pi}{n+1}\right) + \ldots + \sin^{2n}\left(\varphi + n\cdot\frac{\pi}{n+1}\right)\end{array}\right]$$
$$= \frac{1}{m}\left[\begin{array}{l}\sin^{2n}p + \sin^{2n}\left(p + \frac{\pi}{m}\right)\\ + \sin^{2n}\left(p + \frac{2\pi}{m}\right) + \ldots + \sin^{2n}\left(p + (m-1)\frac{\pi}{m}\right)\end{array}\right]$$
$$= \frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Multiplions tous les termes par ρ^{2n} et observons que

$$\rho \sin \varphi,\quad \rho \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{n+1}\right),\ldots,\quad \rho \sin p,\quad \rho \sin\left(p + \frac{\pi}{m}\right),\ldots,$$

ne sont autre chose que les perpendiculaires OP'_1, $OP'_2,\ldots$, OP_1, $OP_2,\ldots$; il vient

$$\frac{\overline{OP'_1}^{2n} + \overline{OP'_2}^{2n} + \ldots + \overline{OP'_{n+1}}^{2n}}{n+1} = \frac{\overline{OP_1}^{2n} + \overline{OP_2}^{2n} + \ldots + \overline{OP_m}^{2n}}{m}.$$

Le système de $n+1$ droites disposées autour d'un point de manière à former des angles égaux entre eux, ayant pour amplitude commune $\frac{\pi}{n+1}$, est donc propre à résoudre la question.

Dans sa proposition XLV, Stewart dit que l'on a

$$\overline{OP_1}^{2n} + \overline{OP_2}^{2n} + \ldots + \overline{OP_m}^{2n} = m \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \rho^{2n},$$

et, comme nous avons trouvé ci-dessus

$$\overline{OP_1}^{2n} + \overline{OP_2}^{2n} + \ldots + \overline{OP_m}^{2n} = m \cdot \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \rho^{2n},$$

il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Cette égalité se vérifie pour $n = 1$, $n = 2$, cas particuliers qui forment l'objet des propositions XIV et XXXIV. Elle a lieu quelle que soit la valeur de n; car je vais montrer que si elle est vraie pour $n-1$, elle l'est aussi pour n. Supposons, en effet, que l'on ait

$$\frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)\ldots n}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Multiplions le premier membre par le facteur $\frac{2(2n-1)}{2^2.n}$, et le second par le facteur égal $\frac{2n-1}{2n}$; il vient

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Ce qu'il fallait trouver.

19. **La proposition XXXI établit une relation entre les distances d'un point quelconque à des points donnés ou inconnus et les perpendiculaires** abaissées du même point sur certaines droites. En voici l'énoncé. Étant donnés m points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et autant de coefficients $k_1, k_2, \ldots, k_m$, on peut trouver un autre point A' et deux droites L'_1, L'_2 qui satisfassent à la relation

$$\frac{k_1\overline{OA_1}^4 + k_2\overline{OA_2}^4 + \ldots + k_m\overline{OA_m}^4}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \overline{OA'}^4 + f^2\left(\overline{OP'_1}^2 + \overline{OP'_2}^2\right) + g^4,$$

quel que soit le point O. En réduisant à l'unité les coefficients k_i, on a l'énoncé de la proposition XXX.

Au moyen des notations dont j'ai fait usage dans ce qui précède, cette relation s'écrit sous la forme

$$\frac{Sk_i[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2]^2}{Sk_i}$$

$$= [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^4 + f^2\left[\frac{(y-\alpha_1 x - \beta_1)^2}{1+\alpha_1^2} + \frac{(y-\alpha_2 x-\beta_2)^2}{1+\alpha_2^2}\right] + g^4,$$

ξ, η étant les coordonnées de A'. Si l'on prend pour origine le point pour lequel on a

$$Sk_i a_i = 0, \quad Sk_i b_i = 0, \quad Sk_i a_i b_i = 0,$$

il vient

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

et l'on est conduit à résoudre, pour déterminer f, g, α_1, β_1, α_2, β_2, les six équations

$$f^2\left(\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_2^2}\right) = 0,$$

$$f^2\left(\frac{1}{1+\alpha_1^2} + \frac{1}{1+\alpha_2^2}\right) = \frac{2}{Sk_i} Sk_i(a_i^2 + 3b_i^2),$$

$$f^2\left(\frac{\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{1+\alpha_2^2}\right) = \frac{2}{Sk_i} Sk_i(3a_i^2 + b_i^2),$$

$$f^2\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{1+\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2\beta_2}{1+\alpha_2^2}\right) = -\frac{2}{Sk_i} Sk_i a_i(a_i^2 + b_i^2),$$

$$f^2\left(\frac{\beta_1}{1+\alpha_1^2} + \frac{\beta_2}{1+\alpha_2^2}\right) = \frac{2}{Sk_i} Sk_i b_i(a_i^2 + b_i^2),$$

$$f^2\left(\frac{\beta_1^2}{1+\alpha_1^2} + \frac{\beta_2^2}{1+\alpha_2^2}\right) + g^4 = \frac{1}{Sk_i} Sk_i(a_i^2 + b_i^2)^2.$$

On ne peut pas supposer $f=0$, car il en résulterait

$$Sk_i(a_i^2+b_i^2)=0,$$

c'est-à-dire une condition particulière. On posera donc

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2^2}=0,$$

ou

$$(\alpha_1+\alpha_2)(1+\alpha_1\alpha_2)=0.$$

En égalant à zéro le second facteur $1+\alpha_1\alpha_2$, on trouve la condition particulière $Sk_ia_i^2=Sk_ib_i$. Par suite, je me bornerai à faire $\alpha_2=-\alpha_1$; cette valeur étant substituée dans la deuxième équation et dans les suivantes, on a

$$\frac{f^2}{1+\alpha_1^2}=\frac{1}{Sk_i}Sk_i(a_i^2+3b_i^2),$$

$$\frac{f^2\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2}=\frac{1}{Sk_i}Sk_i(3a_i^2+b_i^2),$$

$$\frac{f^2\alpha_1}{1+\alpha_1^2}(\beta_2-\beta_1)=\frac{2}{Sk_i}Sk_ia_i(a_i^2+b_i^2),$$

$$\frac{f^2}{1+\alpha_1^2}(\beta_1+\beta_2)=\frac{2}{Sk_i}Sk_ib_i(a_i^2+b_i^2),$$

$$\frac{f^2}{1+\alpha_1^2}(\beta_2^2+\beta_1^2)+g^4=\frac{1}{Sk_i}Sk_i(a_i^2+b_i^2)^2.$$

On tire de ces équations, en ajoutant et divisant membre à membre les deux premières,

$$f^2=\frac{4}{Sk_i}Sk_i(a_i^2+b_i^2),$$

$$\alpha_1=+\sqrt{\frac{Sk_i(3a_i^2+b_i^2)}{Sk_i(a_i^2+3b_i^2)}},\quad \alpha_2=-\sqrt{\frac{Sk_i(3a_i^2+b_i^2)}{Sk_i(a_i^2+3b_i^2)}}.$$

Au moyen de ces valeurs, on déduit de la troisième équation et de la quatrième celles de $\beta_2-\beta_1$ et de $\beta_2+\beta_1$, et, par suite, de β_2 et de β_1. Enfin, la dernière équation fait connaître g^4, et la question est complétement résolue.

TROISIÈME THÉORÈME GÉNÉRAL.

20. Soient L_1, L_2,..., L_m m droites quelconques données, et k_1, k_2,..., k_m autant de coefficients également donnés; on peut trouver $n+1$ autres droites L'_1, L'_2, L'_{n+1}, telles qu'il y ait, entre les perpendiculaires OP_1, OP_2,..., OP_m abaissées d'un point O, pris arbitrairement, sur les premières, et les perpendiculaires $\overline{OP'_1}$, $\overline{OP'_2}$,..., $\overline{OP'_{n+1}}$ abaissées du même point sur les droites trouvées, la relation

$$\frac{k_1\overline{OP_1}^n + k_2\overline{OP_1}^n + \ldots + k_m\overline{OP_m}^n}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \frac{\overline{OP'_1}^n + \overline{OP'_2}^n + \ldots + \overline{OP'_{n+1}}^n}{n+1}.$$

Stewart donne des énoncés séparés pour le cas où n est pair, et pour celui où n est impair; les premiers sont ceux de la proposition XLIX et de la proposition XLVIII, les coefficients k_i étant supposés dans celle-ci égaux à l'unité et $n < m - 1$. Les autres sont d'abord celui de la proposition LI, où l'on considère seulement les points renfermés dans l'intérieur d'un polygone; puis celui de la proposition LIII, où les points sont pris partout où l'on veut, pourvu que l'on ne passe jamais d'un côté à l'autre de l'une quelconque des droites données. La proposition L et la proposition LII sont sujettes aux mêmes restrictions, et l'on suppose les coefficients k_i égaux à l'unité et $n < m - 1$. Ces distinctions tiennent évidemment au changement de signe qu'éprouve la perpendiculaire abaissée sur une droite, quand on passe d'un côté à l'autre. Il n'y a donc point lieu de s'en préoccuper.

Afin d'éviter les radicaux qui se présentent dans l'expression de la perpendiculaire, je la mettrai sous la forme

$$t_i - x\cos\nu_i - y\sin\nu_i,$$

ou

$$\theta_i - x\cos\varphi_i - y\sin\varphi_i,$$

suivant qu'il s'agira de droites connues ou inconnues. t_i, θ_i sont les longueurs des perpendiculaires abaissées de l'origine des coordonnées sur les droites, et ν_i, φ_i les angles que font ces perpendiculaires avec l'axe des x.

21. Soit d'abord $n = 1$. Les équations à résoudre sont

$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 = \frac{2}{Sk_i} Sk_i \sin\nu_i,$$

$$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 = \frac{2}{Sk_i} Sk_i \sin\nu_i,$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{2}{Sh_i} Sk_i t_i.$$

On peut toujours disposer de la direction de l'axe des x, de manière que l'on ait

$$Sk_i \cos\nu_i = 0;$$

car si cette condition n'est pas remplie, appelons φ l'angle que le nouvel axe des x doit faire avec l'axe des x, et posons

$$Sk_i \cos(\nu_i - \varphi) = 0;$$

il vient

$$\cos\varphi\, Sk_i \cos\nu_i + \sin\varphi\, Sk_i \sin\nu_i = 0,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{Sk_i \cos\nu_i}{Sk_i \sin\nu_i}.$$

On a donc, au moyen de ce changement de direction des axes,

$$\cos\varphi_2 = -\cos\varphi_1,$$

et, par conséquent, deux solutions

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1 \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \pi + \varphi_1.$$

La première donne

$$\sin\varphi_1 = \frac{1}{Sk_i} Sk_i \sin\nu_i.$$

Quant aux longueurs θ_1, θ_2, elles ne sont soumises qu'à la condition de donner une somme constante; c'est pourquoi elles sont indéterminées. On aperçoit sans peine que tous les systèmes de deux droites qui résolvent la question se coupent sur une parallèle à l'axe des x, à la distance $\frac{Sk_i t_i}{Sk_i \sin\nu_i}$ de cet axe.

La seconde solution exige que l'on ait

$$Sk_i \sin\nu_i = 0,$$

ce qui n'a lieu que dans des cas particuliers. Alors les deux droites trouvées L'_1, L'_2 sont parallèles entre elles, et leur direction est indéterminée. De plus, chacun des deux membres de l'équation

$$\frac{k_1 \mathrm{OP}_1 + k_2 \mathrm{OP}_2 + \ldots + k_m \mathrm{OP}_m}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \frac{\mathrm{OP}'_1 + \mathrm{OP}'_2}{2}$$

est constant.

Lorsque les droites données sont les côtés d'un polygone régulier, et que les coefficients k_i se réduisent à l'unité, on a la proposition III de Stewart.

22. Soit maintenant $n = 2$, auquel cas on a la proposition XXI, et la proposition XVII k_i étant égal à l'unité; les équations sont au nombre de six, savoir:

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i\cos^2\nu_i,$$

$$\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2\sin\varphi_2 + \cos\varphi_3\sin\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i\sin\nu_i\cos\nu_i,$$

$$\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i\sin^2\nu_i,$$

$$\theta_1\cos\varphi_1 + \theta_2\cos\varphi_2 + \theta_3\cos\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i t_i\cos\nu_i,$$

$$\theta_1\sin\varphi_1 + \theta_2\sin\varphi_2 + \theta_3\sin\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i t_i\sin\nu_i,$$

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i t_i^2.$$

En ajoutant ensemble la première et la troisième, on obtient une identité. Ces deux équations se réduisent donc à une seule, et tout le système à cinq équations entre six inconnues φ_1, φ_2, φ_3, θ_1, θ_2, θ_3. Par conséquent, il y aura indétermination; c'est ce que je vais examiner avec détail.

23. Afin d'abréger les calculs, je supposerai que l'on a placé l'origine au point pour lequel la somme $k_1\overline{\mathrm{OP}}_1^2 + k_2\overline{\mathrm{OP}}_2^2 + \ldots + k_m\overline{\mathrm{OP}}_m^2$ est un minimum. On l'obtient en égalant à zéro les dérivées prises par rapport à x et par rapport à y de l'expression

$$\mathrm{S}k_i[t_i - (x\cos\nu_i + y\sin\nu_i)]^2,$$

c'est-à-dire en posant

$$x\,\mathrm{S}k_i\cos^2 \nu_i + y\,\mathrm{S}k_i \cos\nu_i \sin\nu_i = \mathrm{S}k_i t_i \cos\nu_i,$$
$$x\,\mathrm{S}k_i\cos\nu_i \sin\nu_i + y\,\mathrm{S}k_i \sin^2\nu_i = \mathrm{S}k_i t_i \sin\nu_i,$$

et les valeurs de x et de y, tirées de ces deux équations, sont celles des coordonnées de la nouvelle origine. On aura donc, quand les axes y auront été transportés,

$$\mathrm{S}k_i t_i \cos\nu_i = 0, \quad \mathrm{S}k_i t_i \sin\nu_i = 0.$$

De plus, on peut les tourner dans leur plan d'une quantité angulaire ν, de manière que $\mathrm{S}k_i\cos\nu_i\sin\nu_i$ devienne nul. Il suffit pour cela d'écrire

$$\mathrm{S}k_i\cos(\nu_i-\nu)\sin(\nu_i-\nu) = 0,$$

ou

$$\cos 2\nu\,\mathrm{S}k_i\cos\nu_i\sin\nu_i = \frac{1}{2}\sin 2\nu\,(\mathrm{S}k_i\cos^2\nu_i - \mathrm{S}k_i\sin^2\nu_i),$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang} 2\nu = \frac{2\,\mathrm{S}k_i\sin\nu_i\cos\nu_i}{\mathrm{S}k_i\cos^2\nu_i - \mathrm{S}k_i\sin^2\nu_i};$$

de là deux valeurs de ν, différant entre elles de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire deux directions formant un angle droit: l'une étant prise pour axe des x, l'autre devient donc l'axe des y. Cette recherche a la plus grande analogie avec celle de l'équation la plus simple d'une ligne du second ordre en coordonnées rectangulaires.

24. Je laisse de côté les cas particuliers où les coordonnées de l'origine deviennent infinies ou indéterminées. Les nouvelles équations, dans le cas le plus général, sont:

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\cos^2\nu_i,$$
$$\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2\sin\varphi_2 + \cos\varphi_3\sin\varphi_3 = 0,$$
$$\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\sin^2\nu_i,$$
$$\theta_1\cos\varphi_1 + \theta_2\cos\varphi_2 + \theta_3\cos\varphi_3 = 0,$$
$$\theta_1\sin\varphi_1 + \theta_2\sin\varphi_2 + \theta_3\sin\varphi_3 = 0,$$
$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i^2.$$

Des trois premières on tire

$$\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2 + \cos 2\varphi_3 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i \cos 2\nu_i,$$

$$\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3 = 0;$$

puis, en faisant passer φ_1 dans le second membre, élevant au carré et ajoutant,

$$\cos^2(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i \cos 2\nu_i - \cos 2\varphi_1\right)^2 + \sin^2 2\varphi_1\right],$$

d'où

$$\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2) = 1 - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i \cos 2\nu_i - \cos 2\varphi_1\right)^2 + \sin^2 2\varphi_1\right].$$

D'un autre côté, en décomposant

$$\cos 2\varphi_2 + \cos 2\varphi_3 \quad \text{et} \quad \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3$$

en produits de sinus et de cosinus, on trouve

$$\tan g(\varphi_3 + \varphi_2) = \frac{-\sin 2\varphi_1}{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i \cos 2\nu_i - \cos 2\varphi_1}.$$

On connaît donc $\varphi_3 + \varphi_2$ et $\varphi_3 - \varphi_2$ quand φ_1 est donné; ce qui suffit pour déterminer φ_3 et φ_2.

Les trois équations en θ_1, θ_2, θ_3 donnent, par un calcul facile,

$$\theta_1^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i^2\,\frac{\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)},$$

$$\theta_2^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i^2\,\frac{\sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}{\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)},$$

$$\theta_3^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i^2\,\frac{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)}.$$

Or $\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$ et $\sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)$ s'expriment en fonction des sinus et cosinus des angles $2\varphi_3$ et $2\varphi_2$, de même que $\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2)$ en fonction de $\sin 2\varphi_1$ et $\cos 2\varphi_1$, et l'on a, toutes réductions faites,

$$\sin^2(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_3)$$
$$= \left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\right)^2 [\mathrm{S}k_i \cos^2 \nu_i \,.\, \mathrm{S}k_i \sin^2 \nu_i];$$

par conséquent, si l'on écrit

$$\theta^2 = \frac{\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i t_i^2}{\left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\right)^2 (\mathrm{S}k_i\cos^2 v_i . \mathrm{S}k_i \sin^2 v_i)} \left\{1 - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i \cos 2v_i - \cos 2\varphi\right)^2 + \sin^2 2\varphi\right]\right\},$$

on aura l'équation polaire du lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les droites cherchées.

Le facteur entre accolades peut être mis sous la forme

$$\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i \sin^2 v_i \left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i\cos^2 v_i - 1\right)\cos^2\varphi$$
$$+ \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i \cos^2 v_i \left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i\sin^2 v_i - 1\right)\sin^2\varphi,$$

de sorte qu'il vient finalement

$$\theta^2 = \frac{\mathrm{S}k_i t_i^2}{\mathrm{S}k_i\cos^2 v_i . \mathrm{S}k_i\sin^2 v_i}\left[\begin{array}{l} \mathrm{S}k_i \sin^2 v_i \left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i\cos^2 v_i - 1\right)\cos^2\varphi \\ + \mathrm{S}k_i \cos^2 v_i \left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i\sin^2 v_i - 1\right)\sin^2\varphi \end{array}\right].$$

On reconnaît dans cette équation le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes à l'ellipse dont les axes principaux coïncident en direction avec ceux des coordonnées, et ont pour longueurs, dans le sens des x et des y,

$$\sqrt{\frac{\mathrm{S}k_i t_i^2 \left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i \cos v_i - 1\right)}{\mathrm{S}k_i\cos^2 v_i}}, \quad \sqrt{\frac{\mathrm{S}k_i t_i^2 \left(\frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i \sin^2 v_i - 1\right)}{\mathrm{S}k_i\sin^2 v_i}}.$$

Tous les triangles ou systèmes de trois droites qui satisfont à la question peuvent donc être considérés comme tangents à cette ellipse.

Les pieds des perpendiculaires θ_1, θ_2, θ_3 ont pour centre de gravité ou de figure celui de cette courbe; c'est une conséquence des équations

$$\theta_1\cos\varphi_1 + \theta_2\cos\varphi_2 + \theta_3\cos\varphi_3 = 0,$$
$$\theta_1\sin\varphi_1 + \theta_2\sin\varphi_2 + \theta_3\sin\varphi_3 = 0.$$

25. On peut satisfaire à la relation

$$\frac{k_1\overline{\mathrm{OP}}_1^2 + k_2\overline{\mathrm{OP}}_2^2 + \ldots + k_m\overline{\mathrm{OP}}_m^2}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \frac{\overline{\mathrm{OP}'}_1^2 + \overline{\mathrm{OP}'}_2^2}{2} + \mathrm{C}^2,$$

au moyen de deux droites L'_1, L'_2 et d'une constante C qu'il s'agit de déterminer; c'est l'énoncé de la proposition XX et celui de la proposition XVI, en supposant les coefficients k_i égaux à l'unité.

En effet, choisissons les axes comme il a été indiqué au n° **22**, c'est-à-dire de telle sorte qu'on ait à la fois

$$Sk_i t_i \cos\nu_i = 0, \quad Sk_i t_i \sin\nu_i = 0, \quad Sk_i \cos\nu_i \sin\nu_i = 0;$$

on trouve les équations

$$\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 = 0,$$

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i \cos^2\nu_i,$$

$$\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i \sin^2\nu_i,$$

$$\theta_1 \cos\varphi_1 + \theta_2 \cos\varphi_2 = 0,$$

$$\theta_1 \sin\varphi_1 + \theta_2 \sin\varphi_2 = 0,$$

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + 2C^2 = \frac{3}{Sk_i} Sk_i t_i^2.$$

La première donne

$$\sin 2\varphi_2 = -\sin 2\varphi_1,$$

c'est-à-dire

$$2\varphi_2 = 2\pi - 2\varphi_1 \quad \text{ou} \quad 2\varphi_2 = 2\varphi_1 + \pi.$$

Si l'on fait d'abord

$$\varphi_2 + \varphi_1 = \pi,$$

on a

$$\cos\varphi_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{Sk_i} Sk_i \cos^2\nu_i}, \quad \sin\varphi_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{Sk_i} Sk_i \sin^2\nu_i},$$

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad C^2 = \sqrt{\frac{1}{Sk_i} Sk_i t_i^2}.$$

Si l'on fait

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2},$$

il vient

$$\frac{2}{Sk_i} Sk_i \cos^2\nu_i = \frac{2}{Sk_i} Sk_i \sin\nu_i = 1,$$

double condition qui n'est remplie que dans des cas particuliers.

Supposons qu'elle le soit, nous aurons deux droites se coupant à angle droit, et en appelant A leur point d'intersection, la somme $\overline{OP'_1}^2 + \overline{OP'_2}^2$ sera égal à $\overline{OA}^2$, et nous pourrons écrire

$$\frac{k_1\overline{OP_1}^2 + k_2\overline{OP_2}^2 + \ldots + k_m\overline{OP_m}^2}{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} = \frac{1}{2}\overline{OA}^2 + C^2;$$

on a, comme ci-dessus,

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0 \quad \text{et} \quad C = \sqrt{\frac{1}{Sk_i} Sk_i t_i^2}.$$

L'angle φ_1 demeure arbitraire. Dans ce cas, la question a changé de nature; à la recherche de deux droites, on substitue celle d'un certain point A.

Si les droites $L_1, L_2, \ldots, L_m$ sont les côtés d'un polygone régulier, et que les coefficients k_i soient égaux à l'unité, on a

$$\frac{2}{m} S\cos^2 \nu_i = \frac{2}{m} S\sin^2 \nu_i = 1 \quad \text{et} \quad C^2 = R^2,$$

R étant le rayon du cercle inscrit; ce cas forme l'objet de la proposition V.

Dans la proposition VIII, Stewart a considéré un demi-polygone régulier. Alors on a, comme ci-dessus,

$$\frac{2}{m} S\cos^2 \nu_i = \frac{2}{m} S\sin^2 \nu_i = 1;$$

les droites L'_1, L'_2 sont perpendiculaires entre elles, et la même propriété a encore lieu. Si l'on calcule la distance ρ du point A au centre du cercle inscrit, on trouve qu'elle est égale à une quatrième proportionnelle au périmètre du demi-polygone, à sa base (entre deux sommets opposés) et au diamètre du cercle; il s'ensuit finalement

$$\frac{1}{m}\left(\overline{OP'_1}^2 + \overline{OP'_2}^2 + \ldots + \overline{OP'_m}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{OA}^2 + 2R^2 - \rho^2\right).$$

26. Quand on a $n = 3$, hypothèse qui répond aux propositions XXIV et XXV, il faut d'abord résoudre les équations

$$\cos^3\varphi_1 + \cos^3\varphi_2 + \cos^3\varphi_3 + \cos^3\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\cos^3\nu_i,$$

$$\cos^2\varphi_1\sin\varphi_1 + \cos^2\varphi_2\sin\varphi_2 + \cos^2\varphi_3\sin\varphi_3 + \cos^2\varphi_4\sin\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\cos^2\nu_i\sin\nu_i,$$

$$\cos\varphi_1\sin^2\varphi_1 + \cos\varphi_2\sin^2\varphi_2 + \cos\varphi_3\sin^2\varphi_3 + \cos\varphi_4\sin^2\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\cos\nu_i\sin^2\nu_i,$$

$$\sin^3\varphi_1 + \sin^3\varphi_2 + \sin^3\varphi_3 + \sin^3\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\sin^3\nu_i.$$

Elles ne sont pas susceptibles de se réduire à un moindre nombre; car supposons, pour un instant, que l'un des angles inconnus, φ_4 par exemple, puisse être choisi arbitrairement: les valeurs de φ_1, φ_2, φ_3 en fonction de φ_4, tirées de trois de ces équations, devront rendre la quatrième identique, quel que soit φ_4. Pour fixer les idées et faciliter les calculs, je ferai $\varphi_4 = 0$, et j'admettrai qu'on ait

$$\frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\cos^3\nu_i = 1,\quad \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\cos^2\nu_i\sin\nu_i = 0,$$

$$\frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\cos\nu_i\sin\nu_i = 1,\quad \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i\sin^2\nu_i = 0,$$

ce qui n'empêchera point la conclusion d'être générale. Cela posé, une transformation facile donne

$$\cos^3\varphi_1 + \cos^3\varphi_2 + \cos^3\varphi_3 = 0,$$

$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0,$$

$$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 = 0,$$

$$\sin^3\varphi_1 + \sin^3\varphi_2 + \sin^3\varphi_3 = 0.$$

Soit maintenant

$$\cos^3\varphi + p\cos^2\varphi + q\cos\varphi + r = 0$$

l'équation qui a pour racines $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$, $\cos\varphi_3$; φ_4 étant nul: on trouve par les fonctions symétriques $p = 0$, $r = 0$, de sorte que cette équation devient

$$\cos\varphi\,(\cos^2\varphi + q) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\cos\varphi_1 = 0, \qquad \cos\varphi_2 = +\sqrt{-q}, \qquad \cos\varphi_3 = -\sqrt{-q},$$
$$\sin\varphi_1 = \pm 1, \quad \sin\varphi_2 = \pm\sqrt{1+q}, \quad \sin\varphi_3 = \pm\sqrt{1+q}.$$

Or, avec quelque combinaison de signes que l'on substitue ces valeurs des sinus dans les relations

$$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 = 0, \quad \sin^3\varphi_1 + \sin^3\varphi_2 + \sin^3\varphi_3 = 0,$$

les résultats qu'on obtient sont contradictoires; donc il n'est pas permis de regarder l'un des angles inconnus comme arbitraire. En d'autres termes, les quatre équations ci-dessus suffisent généralement pour déterminer ces angles.

Les longueurs θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 dépendant des six équations

$$\theta_1\cos^2\varphi_1 + \theta_2\cos^2\varphi_2 + \theta_3\cos^2\varphi_3 + \theta_4\cos^2\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i \cos^2\nu_i,$$

$$\theta_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1 + \theta_2\cos\varphi_2\sin\varphi_2 + \theta_3\cos\varphi_3\sin\varphi_3 + \theta_4\cos\varphi_4\sin\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i\cos\nu_i\sin\nu_i,$$

$$\theta_1\sin^2\varphi_1 + \theta_2\sin^2\varphi_2 + \theta_3\sin^2\varphi_3 + \theta_4\sin^2\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i\sin^2\nu_i,$$

$$\theta_1^2\cos\varphi_1 + \theta_2^2\cos\varphi_2 + \theta_3^2\cos\varphi_3 + \theta_4^2\cos\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i^2\cos\nu_i,$$

$$\theta_1^2\sin\varphi_1 + \theta_2^2\sin\varphi_2 + \theta_3^2\sin\varphi_3 + \theta_4^2\sin\varphi_4 = \frac{4}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i^2\sin\nu_i,$$

$$\theta_1^3 + \theta_2^3 + \theta_3^3 + \theta_4^3 = \frac{5}{\mathrm{S}k_i}\,\mathrm{S}k_i t_i^3,$$

et les coefficients devant être considérés, d'après ce qui vient d'être dit, comme des fonctions connues des quantités k_i, ν_i, on pourra disposer des m longueurs t_i, de façon que chaque second membre acquière telle valeur qu'on voudra, et, par conséquent, que les valeurs de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, tirées de quatre de ces équations, ne puissent satisfaire aux deux équations restantes. Ces observations, qu'il serait trop long d'accompagner d'exemples, suffisent pour démontrer que la solution du problème n'est possible que sous certaines conditions particulières.

27. Il est à remarquer que si l'on avait à la fois

$$S k_i \cos^3 v_i = 0, \quad S k_i \cos^2 v_i \sin v_i = 0,$$
$$S k_i \cos v_i \sin^2 v_i = 0, \qquad S k_i \sin^3 v_i = 0,$$

la question se résoudrait complétement; car d'abord on aurait

$$\cos^3 \varphi_1 + \cos^3 \varphi_2 + \cos^3 \varphi_3 + \cos^3 \varphi_4 = 0,$$
$$\cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 \sin \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 \sin \varphi_3 + \cos^2 \varphi_4 \sin \varphi_4 = 0,$$
$$\cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 + \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_2 + \cos \varphi_3 \sin^2 \varphi_3 + \cos \varphi_4 \sin^2 \varphi_4 = 0,$$
$$\sin^3 \varphi_1 + \sin^3 \varphi_2 + \sin^3 \varphi_3 + \sin^3 \varphi_4 = 0,$$

et ces équations ne changeant pas, ainsi qu'on peut s'en assurer sans peine lorsqu'on ajoute à chacun des angles inconnus un même angle choisi arbitrairement, il en résulte qu'on peut supposer d'abord $\varphi_4 = 0$, et que les valeurs obtenues ainsi pour φ_1, φ_2, φ_3 auront toute la généralité requise en leur ajoutant un angle arbitraire φ_4.

Cherchons actuellement à déterminer les coefficients de l'équation

$$\cos^3 \varphi + p \cos^2 \varphi + q \cos \varphi + r = 0,$$

dont les racines sont $\cos \varphi_1$, $\cos \varphi_2$, $\cos \varphi_3$; φ_4 étant nul: on trouve, par les fonctions symétriques, $p = 1$, $q = r$, et cette équation se met sous la forme

$$(\cos \varphi + 1)(\cos^2 \varphi + q) = 0,$$

d'où

$$\cos \varphi_1 = -1, \quad \cos \varphi_2 = +\sqrt{-q}, \quad \cos \varphi_3 = -\sqrt{-q},$$
$$\sin \varphi_1 = 0, \quad \sin \varphi_2 = \pm \sqrt{1+q}, \quad \sin \varphi_3 = \pm \sqrt{1+q}.$$

On reconnaît immédiatement que q demeure indéterminé, et qu'il reste six équations entre θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, φ_4, q, c'est-à-dire autant d'équations que d'inconnues. On vérifie d'ailleurs sans peine que ces équations se résolvent complétement et fournissent pour les inconnues des valeurs déterminées.

28. Pour $n = 4$, ce qui est le cas de la proposition XXXVIII et de la proposition XXXVII, les coefficients étant égaux à l'unité et $m > 4$, l'excès du nombre des équations sur celui des inconnues démontre clairement que les énoncés de Stewart ne se vérifient point; à plus

forte raison, il en est de même pour des valeurs supérieures de n, si ce n'est dans quelques cas particuliers, ceux, par exemple, où les droites données sont les côtés d'un polygone régulier circonscrit à un cercle de rayon R. Alors les sommes des puissances n des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque sur ces droites s'expriment d'une manière simple. Nommons ρ la longueur de la droite qui va du point O au centre du cercle, et φ l'angle qu'elle fait avec la perpendiculaire OP_1; ceux qu'elle fait avec les perpendiculaires $OP_2, OP_3, \ldots$, sont $\varphi + \frac{2\pi}{m}, \varphi + 2\frac{2\pi}{m}, \ldots$: on a donc

$$\overline{OP}_1^n + \overline{OP}_2^n + \ldots + \overline{OP}_m^n = \mathbf{S}_{i=0}^{i=m-1}\left[R - \rho\cos\left(\varphi + \frac{2i\pi}{m}\right)\right]^n.$$

Développant et ayant égard à la relation rappelée dans le n° **8**, il vient

$$\begin{gathered}\overline{OP}_1^n + \overline{OP}_2^n + \ldots + \overline{OP}_m^n \\ = m\left[R^n + \frac{n(n-1)}{1^2 . 2^2}R^{n-2}\rho^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2 . 2^2 . 3^2 . 4^2}R^{n-4}\rho^4 + \ldots\right].\end{gathered}$$

Quand le point O est sur la circonférence du cercle inscrit dans le polygone, la somme ci-dessus se réduit à

$$mR^n \times \frac{1}{2^n}\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} = m\,\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{1.2.3.4\ldots n}.R^n.$$

Stewart a démontré ces théorèmes pour $n = 2$, dans la proposition V, comme il a été dit au n° **25**, et les a seulement énoncés pour $n = 3$ dans les propositions XXII et XXIII, et pour $n = 4$ dans les propositions XXVIII et XXIX; c'est seulement dans les propositions XXXIX et XL qu'il donne la formule ci-dessus et la précédente, en restreignant celle-ci au cas où le point O est dans l'intérieur du polygone, quand l'exposant n est impair. Mais on aperçoit sans peine qu'elle subsiste lorsque le point O est extérieur au polygone, pourvu que l'on regarde comme négatives les perpendiculaires abaissées sur les côtés qui, prolongés au besoin, passent entre ce point et le centre du cercle inscrit. Cette proposition est intuitive pour $n = 1$.

THÉORÈMES PARTICULIERS.

29. Je terminerai cette analyse par un examen rapide de celles des propositions du géomètre anglais qui n'ont pu trouver place dans ce qui précède. L'ordre dans lequel il les présente porte à croire qu'elles étaient, dans sa pensée, au moins en grande partie, des lemmes propres à conduire synthétiquement aux propositions principales que nous avons discutées, et qui se trouvent dépourvues du degré de généralité qu'il leur attribuait.

Quelques-unes n'ont besoin que d'être énoncées pour qu'on en aperçoive la vérité; elles sont relatives au degré ou à la nature de certains lieux géométriques, et il est tout simple qu'en les traitant par la méthode des coordonnées de Descartes, on trouve à priori des résultats auxquels la synthèse ne parvient que péniblement. Voici ces propositions :

PROPOSITION LIV. *Le lieu du point* O *d'où l'on peut mener à* m *droites parallèles* $L_1, L_2,\ldots, L_m$, *sous des angles donnés autant de droites* $OQ_1, OQ_2,\ldots, OQ_m$, *telles que la somme des puissances* n *de leurs longueurs soit constante, est une ligne droite.*

PROPOSITION LV. *Le lieu du point* O, *tel que la somme des puissances* n *des perpendiculaires abaissées de ce point sur* $n+1$ *droites données soit constante, est une ligne courbe* (an oval figure) *de degré* n *ou d'un degré moindre.*

PROPOSITION LVI. *Étant donné deux groupes* $L_1, L_2,\ldots, L_m$ *et* $L'_1, L'_2,\ldots, L'_m$ *de droites toutes parallèles entre elles, ou se coupant en un même point, le lieu du point* O *tel, que menant à celles-ci sous des angles donnés, les droites* $OQ_1, OQ,\ldots, OQ_m, OQ'_1, OQ'_2,\ldots, OQ'_m$, *on a*

$$\frac{\overline{OQ_1}^n + \overline{OQ_2}^n + \ldots + \overline{OQ_m}^n}{\overline{OQ'_1}^n + \overline{OQ'_2}^n + \ldots + \overline{OQ'_m}^n} = k,$$

k étant une quantité constante, est une ligne droite.

PROPOSITION LVII. *Étant donné deux groupes* $L_1, L_2,\ldots, L_{n+1}$ *et* $L'_1, L'_2,\ldots, L'_{n+1}$ *de* $n+1$ *droites situées d'une manière quelconque, le*

lieu du point O *pour lequel on a, entre les perpendiculaires* OP_1, $OP_2, \ldots, OP_{n+1}$ *abaissées sur les premières, et les perpendiculaires* OP'_1, $OP'_2, \ldots, OP'_{n+1}$ *abaissées sur les autres, la relation*

$$\frac{\overline{OP_1}^n + \overline{OP_2}^n + \ldots + \overline{OP_{n+1}}^n}{\overline{OP'_1}^n + \overline{OP'_2}^n + \ldots + \overline{OP'_{n+1}}^n} = k,$$

k étant une quantité constante, est une ligne de degré n ou d'un degré moindre.

Proposition LVIII. *Étant donné m droites* $L_1, L_2, \ldots, L_m$, *le lieu du point* O *pour lequel on a, entre les droites* $OQ_1, OQ_2, \ldots, OQ_m$ *rencontrant* $L_1, L_2, \ldots, L_m$ *sous des angles donnés, la relation*

$$\overline{OQ_1}^n + \overline{OQ_2}^n + \ldots + \overline{OQ_m}^n = k,$$

k étant une quantité constante, est une courbe (an oval figure) *du degré n ou d'un degré moindre.*

Proposition LIX. *Étant donné deux groupes de droites* $L_1, L_2, \ldots, L_m$ *et* $L'_1, L'_2, \ldots, L'_m$, *situées d'une manière quelconque, le lieu du point* O *tel, que menant à celles-ci des droites* $OQ_1, OQ_2, \ldots, OQ_m$, $OQ'_1, OQ''_2, \ldots, OQ'_m$, *sous des angles donnés, on a la relation*

$$\frac{\overline{OQ_1}^n + \overline{OQ_2}^n + \ldots + \overline{OQ_m}^n}{\overline{OQ'_1}^n + \overline{OQ'_2}^n + \ldots + \overline{OQ'_m}^n} = k,$$

k étant une quantité constante, est une ligne du degré n ou d'un degré moindre.

30. Je passe maintenant aux théorèmes proprement dits. Pour ne pas être trop long, je me bornerai à donner les équations d'où dépendent les quantités dont il ne s'agit que de démontrer l'existence.

Proposition I. *Si du point* D, *pris sur le côté* BC *du triangle* ABC, *on mène aux deux autres côtés* AB, AC *des parallèles qui les rencontrent en* E, F, *on a la relation*

$$AB \times AE + AC \times AF = \overline{AD}^2 + BD \times CD.$$

Stewart en donne la démonstration, assez facile à retrouver d'ail-

leurs. Quand on a BD = CD, on tombe sur un théorème bien connu de géométrie élémentaire.

Proposition II. *Sur la droite* AB, *soit pris un point* C *entre* A *et* B; *si de ces trois points on mène des droites* AD, BD, CD *à un quatrième point* D, *on a la relation*

$$\frac{\overline{AD}^2}{AB\times AC}+\frac{\overline{BD}^2}{BA\times BC}-\frac{\overline{CD}^2}{CA\times CB}=1.$$

La démonstration, également donnée par Stewart, n'a rien de difficile.

Les théorèmes qui suivent sont relatifs au cercle.

Proposition VI. *Étant donné un cercle et une droite, on peut trouver un point* A *tel, que* MP *étant la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur la droite, on ait*

$$\overline{AM}^2 = k\times MP,$$

k étant une quantité constante.

On peut inversement, étant donné le point A et le cercle, chercher la droite; c'est même à peu près ainsi que Stewart présente l'énoncé de sa proposition. Il donne la construction que voici :

Menez un diamètre par le point donné A, et sur ce diamètre déterminez le point B qui appartient à la polaire de A; la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB sera la droite demandée. Quant au coefficient k, il est représenté par le double de la distance du point A au centre du cercle.

31. Proposition LX. *Étant donné un cercle et deux points* A, B, *on peut trouver un troisième point* C *tel, que menant par ce dernier une droite quelconque qui rencontre la circonférence en* D, E, *on aura la relation*

$$\frac{AD\times BD}{AE\times BE}=\frac{CD}{CE}.$$

Nommons p', q'; p'', q''; ξ, η; x', y'; x'', y'' les coordonnées des points A, B, C, D, E rapportées à deux axes rectangulaires passant

par le centre du cercle, et R le rayon de celui-ci ; on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{AD} &= \sqrt{(p'-x')^2+(q'-y')^2}, & \mathrm{BD} &= \sqrt{(p''-x')^2+(q''-y'')^2},\\
\mathrm{AE} &= \sqrt{(p'-x'')^2+(q'-y'')^2}, & \mathrm{BE} &= \sqrt{(p''-x'')^2+(q''-y'')^2},\\
\mathrm{CD} &= \sqrt{(x'-\xi)^2+(y'-\eta)^2}, & \mathrm{CE} &= \sqrt{(x''-\xi)^2+(y''-\eta)^2},\\
& x'^2+y'^2=\mathrm{R}^2, & & x''^2+y''^2=\mathrm{R}^2,\\
& y'-\eta=\alpha(x'-\xi), & & y''-\eta=\alpha(x''-\xi),
\end{aligned}$$

α étant une quantité indéterminée. Substituant ces valeurs de AD, BD, AE, BE, CD, CE dans la relation annoncée par Stewart, et éliminant x', y', x'', y'', il vient une équation qui doit être satisfaite quelle que soit la valeur de α; donc les coefficients des diverses puissances de α doivent être nuls séparément. Or cette équation est à deux termes, et se décompose dans les deux suivantes :

$$\begin{aligned}
&[\eta-(q'+q'')](\xi^2+\eta^2-\mathrm{R}^2)^2\\
&+\left\{\begin{array}{l}[(p'-\xi)^2+(q'-\eta)^2](q''-\eta)\\ +[(p''-\xi)^2+(q''-\eta)^2](q'-\eta)\end{array}\right\}(\eta^2+\xi^2-\mathrm{R}^2)\\
&+[(p'-\xi)^2+(q'-\eta)^2][(p''-\xi)^2+(q''-\eta)^2]\,\eta=0,\\
&[\xi-(p'+p'')](\xi^2+\eta^2-\mathrm{R}^2)^2\\
&+\left\{\begin{array}{l}[(p'-\xi)^2+(q'-\eta)^2](p''-\xi)\\ +[(p''-\xi)^2+(q''-\eta)^2](p'-\xi)\end{array}\right\}(\eta^2+\xi^2-\mathrm{R}^2)\\
&+[(p'-\xi)^2+(q'-\eta)^2][(p''-\xi)^2+(q''-\eta)^2]\,\xi=0,
\end{aligned}$$

lesquelles fournissent, en général, un certain nombre de systèmes de valeurs de ξ et de η propres à représenter le point C.

Proposition LXI. *Étant donné un cercle et deux points* A_1, A_2, *on peut trouver deux droites* L_1, L_2 *telles, qu'abaissant d'un point quelconque* O *de la circonférence des perpendiculaires* OP_1, OP_2 *sur celles-ci, on ait la relation*

$$\overline{\mathrm{OA}}_1^2\times\overline{\mathrm{OA}}_2^2=k^2\left(\overline{\mathrm{OP}}_1^2+\overline{\mathrm{OP}}_2^2\right),$$

k étant une quantité constante.

Cette relation s'exprime en écrivant

$$\begin{aligned}
&[(x-p')^2+(y-q')^2][(x-p'')^2+(y-q'')^2]\\
&=k^2[(t_1-x\cos\nu_1-y\sin\nu_1)^2+(t_2-x\cos\nu_2-y\sin\nu_2)^2];
\end{aligned}$$

p', q', p'', q'' sont toujours les coordonnées des points A_1, A_2, et les quantités t_1, v_1, t_2, v_2, qui figurent dans le second membre, fixent les positions des droites cherchées, comme il a été dit au n° **20**.

Développant, éliminant ensuite y au moyen de l'équation

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

qui est celle du cercle, dont on suppose le centre situé à l'origine des coordonnées, et égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x après avoir fait disparaître les radicaux, il vient les cinq équations

$$k^2(\cos 2v_1 + \cos 2v_2) = 4(p'p'' - q'q''),$$

$$k^2(\sin 2v_1 + \sin 2v_2) = 4(p'q'' + p''q'),$$

$$\begin{aligned} &k^2(t_1 \cos v_1 + t_2 \cos v_2) \\ &= (p' + p'')R^2 + [p''(p'^2 + q'^2) + p'(p''^2 + q''^2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &k^2(t_1 \sin v_1 + t_2 \sin v_2) \\ &= (q' + q'')R^2 + [q''(p'^2 + q'^2) + q'(p''^2 + q''^2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &k^2[t_1^2 + t_2^2 + R^2(\sin^2 v_1 + \sin^2 v_2)] \\ &= R^4 + (p'^2 + q'^2 + p''^2 + q''^2 + 4q'q'')R^2 + (p'^2 + q'^2)(p''^2 + q''^2), \end{aligned}$$

lesquelles renferment cinq inconnues v_1, v_2, t_1, t_2, k, et sont ainsi en nombre suffisant pour les déterminer.

PROPOSITION LXII. *Étant donné un cercle, deux droites* L_1, L_2 *et deux coefficients* k_1, k_2, *on peut trouver un point* C *tel, que menant par ce point une droite quelconque qui rencontre la circonférence en* D, E, *et abaissant sur les droites données les perpendiculaires* DP_1, DP_2, EQ_1, EQ_2, *on aura la relation*

$$\frac{k_1 \overline{DP_1}^2 + k_2 \overline{DP_2}^2}{k_1 \overline{EQ_1}^2 + k_1 \overline{EQ_2}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CE}^2}.$$

Soient ξ, η; x', y'; x'', y'' les coordonnées des points C, D, E rapportées à deux axes rectangulaires passant par le centre de cercle, R le rayon et t_1, v_1, t_2, v_2 des quantités qui ont la signification indiquée au n° **20**; cette relation prend la forme

$$\frac{k_1(t_1 - x'\cos v_1 - y'\sin v_1)^2 + k_2(t_2 - x'\cos v_2 - y'\sin v_2)^2}{k_1(t_1 - x''\cos v_1 - y''\sin v_1)^2 + k_2(t_2 - x''\cos v_2 - y''\sin v_2)^2} = \frac{(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2}{(x'' - \xi)^2 + (y'' - \eta)^2}.$$

Si l'on élimine x', y', x'', y'' au moyen des équations

$$x'^2 + y'^2 = \mathrm{R}^2, \qquad x''^2 + y''^2 = \mathrm{R}^2,$$
$$y' - \eta = \alpha(x' - \xi), \quad y'' - \eta = \alpha(x'' - \xi),$$

α étant un coefficient variable, on trouve une équation en α à deux termes, laquelle se sépare en deux autres, savoir :

$$(k_1\varpi_1^2 + k_2\varpi_2^2)\,\xi + (k_1\varpi_1\cos\nu_1 + k_2\varpi_2\cos\nu_2)(\xi^2 + \eta^2 - \mathrm{R}^2) = 0,$$
$$(k_1\varpi_1^2 + k_2\varpi_2^2)\,\eta + (k_1\varpi_1\sin\nu_1 + k_2\varpi_2\sin\nu_2)(\xi^2 + \eta^2 - \mathrm{R}^2) = 0,$$

où l'on fait, pour abréger,

$$\varpi_1 = t_1 - \xi\cos\nu_1 - \eta\sin\nu_1, \quad \varpi_2 = t_2 - \xi\cos\nu_2 - \eta\sin\nu_2.$$

Ces deux équations feront connaître les valeurs des coordonnées ξ, η du point C.

Proposition LXIII. *Étant donné un cercle et deux droites* L_1, L_2 *formant entre elles un angle égal au double de celui du triangle équilatéral, on peut trouver deux autres droites* L'_1, L'_2 *telles, qu'il y ait entre les perpendiculaires* OP_1, OP_2 *abaissées d'un point quelconque* O *de la circonférence sur les droites données, et les perpendiculaires* OP'_1, OP'_2 *abaissées du même point sur les droites trouvées, la relation*

$$\overline{\mathrm{OP}}_1^3 + \overline{\mathrm{OP}}_2^3 = k\left(\overline{\mathrm{OP}'_1}^2 + \overline{\mathrm{OP}'_2}^2\right),$$

k étant une quantité constante.

Prenons pour origine des coordonnées le point d'intersection des droites L_1, L_2, et pour axe des x la droite qui coupe en deux parties égales l'angle 2ν qu'elles forment. Afin de généraliser la question, je ne ferai d'abord aucune hypothèse sur cet angle, et j'écrirai en conséquence

$$(x\sin\nu + y\cos\nu)^3 + (x\sin\nu - y\cos\nu)^3$$
$$- k\left[(\theta_1 - x\cos\varphi_1 - y\sin\varphi_1)^2 + (\theta_2 - x\cos\varphi_2 - y\sin\varphi_2)^2\right] = 0,$$

φ_1, φ_2, θ_1, θ_2 servant à fixer la position des droites inconnues, conformément à la notation indiquée au n° **20**.

Pour que cette équation soit celle d'un cercle, il faut d'abord que les termes du troisième degré disparaissent. Or cela ne saurait avoir lieu en disposant des coefficients qu'ils renferment, car leur en-

semble est égal à $2x\sin v(x^2\sin^2 v + 3y^2\cos^2 v)$. Si l'on faisait $\sin v = 0$, l'équation ne donnerait qu'un point, quelles que fussent les valeurs de φ_1, φ_2, θ_1, θ_2. Il faut donc que l'ensemble des autres termes soit divisible par $x\sin v$ ou simplement par x. Par suite, on a nécessairement, les solutions imaginaires étant écartées,

$$\sin\varphi_1 = 0, \quad \sin\varphi_2 = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0,$$

et l'équation du lieu, ramenée au second degré, peut s'écrire

$$x^2\sin^2 v + 3y^2\cos^2 v - \frac{kx}{\sin v} = 0.$$

Cette équation ne sera celle d'un cercle qu'autant que les coefficients de x^2 et de y^2 seront égaux entre eux; on posera donc

$$\sin^2 v = 3\cos^2 v, \quad \text{d'où} \quad \cos v = \pm\frac{1}{2};$$

ce qui nous donne l'hypothèse admise dans l'énoncé de Stewart, laquelle est ainsi la seule possible. Au moyen de cette valeur, l'équation devient

$$x^2 + y^2 \pm \frac{8k}{3\sqrt{3}}x = 0,$$

ou

$$\left(x \pm \frac{4k}{3\sqrt{3}}\right)^2 + y^2 = \frac{16k^2}{27},$$

équation d'un cercle qui a pour rayon $\frac{4}{3\sqrt{3}}k$; on aura donc

$$k = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,R,$$

R étant le rayon du cercle donné.

Cette analyse montre que le cercle ne peut être donné à volonté, comme l'annonce Stewart, puisqu'il passe par le point de rencontre des droites L_1, L_2 et a son centre sur la bissectrice de leur angle. On voit aussi que les deux droites inconnues, quand elles sont réelles, se réduisent à une seule, qui est l'axe des y.

PROPOSITION LXIV. *Étant donné un cercle et deux droites* L_1, L_2 *formant entre elles un angle double de celui du triangle équilatéral,*

on peut trouver un point C *tel, que menant par ce point une droite quelconque qui rencontre la circonférence en* D, E, *et abaissant sur* L_1, L_2 *les perpendiculaires* DP_1, DP_2, EQ_1, EQ_2, *on aura la relation*

$$\frac{\overline{DP}_1^3 + \overline{DP}_2^3}{\overline{EQ}_1^3 + \overline{EQ}_2^3} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CE}^2}.$$

Prenons les mêmes axes que dans la solution précédente, et nommons p, q; ξ, η; x', y'; x'', y'' les coordonnées du centre du cercle, et des points C, D, E; cette relation devient

$$\frac{x'(x'^2+y'^2)}{x''(x''^2+y''^2)} = \frac{(x'-\xi)^2+(y'-\eta)^2}{(x''-\xi)^2+(y''-\eta)^2}.$$

Éliminant x', y', x'', y'' au moyen des équations

$$(x'-p)^2 + (y'-q)^2 = R^2, \quad (x''-p)^2 + (y''-q)^2 = R^2,$$
$$y'-\eta = \alpha(x'-\xi), \qquad y''-\eta = \alpha(x''-\xi),$$

où α est un coefficient variable, il vient une équation qui se partage en deux autres, savoir,

$$\begin{gathered}[(\xi-p)^2 + (\eta-q)^2 - R^2]^2 - (3\xi^2 + 2\eta^2)[(\xi-p)^2 + (\eta-q)^2 - R^2] \\ + 2\xi(\xi-p)(\xi^2+\eta^2) = 0, \\ \eta\xi[(\xi-p)^2 + (\eta-q)^2 - R^2] - \xi(\eta-q)(\xi^2+\eta^2) = 0,\end{gathered}$$

ce qui suffit pour déterminer ξ, η. On remarque qu'une solution est donnée par l'hypothèse $\xi = 0$, à laquelle correspondent les valeurs de η qui satisfont aux équations

$$p^2 + q^2 - R^2 = 2q\eta, \quad p^2 + (\eta-q)^2 - R^2 = 0.$$

A la suite de ces propositions relatives au cercle, qui sont les dernières de son livre, Stewart dit qu'on en trouverait d'analogues pour les sections coniques. Suivant lui, elles auraient facilité la solution de certains problèmes. On voudrait, par exemple, trouver sur une circonférence de cercle un point tel, que le produit de ses distances à deux points fixes soit égal à une quantité donnée. La solution consiste simplement à construire une cassinoïde dont les points d'intersection avec la circonférence sont les points cherchés. Stewart fait remarquer qu'on résoudrait aussi ce problème en traçant

une ellipse; car, d'après la proposition LXI, on peut déterminer deux droites, telles que le carré du produit des distances d'un point quelconque de la circonférence aux points donnés soit égal à une constante multipliée par la somme des carrés des perpendiculaires abaissées du même point sur ces droites. On connaîtra donc la somme des carrés des distances du point cherché aux droites dont il s'agit, c'est-à-dire une ellipse sur laquelle il doit se trouver.

Addition relative aux équations du n° 5.

Ces équations peuvent se résoudre au moyen de la transformation que voici :

L'équation, trouvée au n° 4,

$$\eta_1^2 = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2 \,\frac{2\dfrac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2 - 3\xi_1^2}{3\dfrac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2},$$

étant mise sous la forme

$$\frac{\xi_1^2}{\dfrac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2} + \frac{\eta_1^2}{\dfrac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2} = 1,$$

on voit que le point dont les coordonnées sont ξ_1, η_1 se trouve sur une section conique ayant pour centre l'origine des coordonnées, et pour demi-axes principaux $\sqrt{\dfrac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2}$, $\sqrt{\dfrac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2}$. Et comme une semblable relation existe entre les coordonnées ξ_2, η_2; ξ_3, η_3 des deux autres points inconnus, on en conclut que ces trois points se trouvent sur cette conique, laquelle peut être une ellipse, une hyperbole ou même une courbe imaginaire, selon la combinaison de signes présentée par les quantités $\mathrm{S}k_i a_i^2$, $\mathrm{S}k_i b_i^2$. Puisque l'on a supposé que $\mathrm{S}k_i$ est positif, on aura une ellipse quand l'une et l'autre seront positives. C'est d'ailleurs le seul cas où les points cherchés soient réels, attendu que les sommes $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$, $\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2$ ne sauraient être alors

négatives. L'origine des coordonnées est leur centre de gravité, propriété qu'expriment les équations (1) et (2). On sait que les rayons menés de ce point aux points inconnus divisent l'aire de l'ellipse en trois secteurs équivalents. D'après cette remarque, si nous appelons ω un angle auxiliaire, nous pourrons faire :

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2}\cos\omega, \qquad \eta_1 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2}\sin\omega,$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2}\cos\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right), \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2}\sin\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\xi_3 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2}\cos\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right), \quad \eta_3 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2}\sin\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Ces expressions, substituées dans les équations (1), (2), (3), (4) et (5), y satisfont. Les trois autres équations (6), (7) et (8) deviennent, toutes réductions faites,

$$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2}\left(\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2 - \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2\right)\cos 3\omega = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i(a_i^2 + b_i^2),$$

$$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2}\left(\frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i a_i^2 - \frac{2}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i^2\right)\sin 3\omega = \frac{3}{\mathrm{S}k_i}\mathrm{S}k_i b_i(a_i^2 + b_i^2),$$

$$\frac{3}{2}(\mathrm{S}k_i a_i^2)^2 + \mathrm{S}k_i a_i^2 - \mathrm{S}k_i b_i^2 + \frac{3}{2}(\mathrm{S}k_i b_i^2)^2 = \mathrm{S}k_i.\mathrm{S}k_i(a_i + b_i^2)^2.$$

La dernière de ces équations n'est autre chose que la condition trouvée au n° **4**, sous une forme un peu différente. Les deux autres donnent

$$\operatorname{tang} 3\omega = \frac{\dfrac{\mathrm{S}k_i b_i(a_i^2 + b_i^2)}{\sqrt{\mathrm{S}k_i b_i^2}}}{\dfrac{\mathrm{S}k_i a_i(a_i^2 + b_i^2)}{\sqrt{\mathrm{S}k_i a_i^2}}}.$$

Soit ω_1 la plus petite valeur de ω; on aura, pour l'ensemble des solutions propres à faire connaître la position de l'un quelconque des points cherchés,

$$\omega_1, \qquad \omega_1 + \frac{\pi}{3}, \qquad \omega_1 - \frac{\pi}{3},$$

et, pour déterminer les deux autres,

$$\omega_1 + \frac{2\pi}{3}, \quad \omega_1 + \frac{3\pi}{3}, \quad \omega_1 + \frac{\pi}{3},$$

$$\omega_1 + \frac{4\pi}{3}, \quad \omega_1 + \frac{5\pi}{3}, \quad \omega_1 + \pi.$$

Indication de quelques auteurs qui se sont occupés des théorèmes généraux de Stewart.

Pendant que l'on imprimait l'analyse qui précède, j'ai reconnu que les théorèmes de Stewart avaient été déjà l'objet de quelques recherches. Le volume des *Transactions d'Édimbourg* pour 1805 contient, sur ce sujet, un Mémoire de M. Glenie. Cet auteur ne s'est occupé que des systèmes de points et de droites qui forment des polygones réguliers. On trouve, dans le tome V des *Annales* de M. Gergonne (1814 et 1815), les énoncés d'un grand nombre de théorèmes sur les polygones réguliers, par M. Français; un certain nombre se confondent avec ceux de Stewart. Les démonstrations de M. Français n'ont d'ailleurs pas été données.

Le *Journal de Mathématiques de Dublin et Cambridge* a publié en 1841 (1re série, 1841, tome II, page 271) un article de M. R. Leslie Ellis, où l'on trouve la démonstration de ce théorème dont je me suis servi :

Si $f(\varphi)$ est une fonction entière du sinus et du cosinus de l'angle φ, la somme

$$f(\varphi) + f\left(\varphi + \frac{2\pi}{m}\right) + f\left(\varphi + \frac{4\pi}{m}\right) + \ldots + f\left(\varphi + 2(m-1)\frac{\pi}{m}\right)$$

est indépendante de φ quand le degré de la fonction est inférieur à m.

M. R. Leslie Ellis ne le fait connaître, en ce qui concerne Stewart, que comme propre à démontrer analytiquement les propositions établies par M. Glenie.

Enfin on trouve dans le même Recueil (2e série, tome I, page 229), un article de M. T. S. Davies, où l'on démontre les propositions VII et VIII de Stewart.

Tableau de correspondance entre les numéros des propositions contenues dans l'ouvrage de Stewart et ceux de l'analyse.

NUMÉROS des propositions de Stewart.	NUMÉROS correspondants de l'analyse.	NUMÉROS des propositions de Stewart.	NUMÉROS correspondants de l'analyse.
I	30	XXXIII	4
II	*ibid.*	XXXIV	18
III	21	XXXV	17
IV	3	XXXVI	*ibid.*
V	25	XXXVII	28
Idem.	28	XXXVIII	*ibid.*
VI	30	XXXIX	*ibid.*
VII	3	XL	*ibid.*
VIII	25	XLI	8
IX	3	XLII	*ibid.*
X	*ibid.*	XLIII	1
XI	2	XLIV	*ibid.*
XII	*ibid.*	XLV	18
XIII	11	XLVI	9
XIV	18	XLVII	*ibid.*
XV	16	XLVIII	20
XVI	25	XLIX	*ibid.*
XVII	22	L	*ibid.*
XVIII	11	LI	*ibid.*
XIX	16	LII	*ibid.*
XX	25	LIII	*ibid.*
XXI	22	LIV	29
XXII	28	LV	*ibid.*
XXIII	*ibid.*	LVI	*ibid.*
XXIV	26	LVII	*ibid.*
XXV	*ibid.*	LVIII	*ibid.*
XXVI	6	LIX	*ibid.*
XXVII	*ibid.*	LX	31
XXVIII	28	LXI	*ibid.*
XXIX	*ibid.*	LXII	*ibid.*
XXX	19	LXIII	*ibid.*
XXXI	*ibid.*	LXIV	*ibid.*
XXXII	4	LXV	*ibid.*

Sur le nombre de divisions à effectuer pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres complexes de la forme $a + b\sqrt{-1}$, où a et b sont entiers;

PAR M. ATHANASE **DUPRÉ**,
Professeur de Mathématiques appliquées à la Faculté des Sciences de Rennes.

Les opérations à effectuer pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres complexes ayant une grande analogie avec celles que l'on pratique pour le même but en arithmétique élémentaire, j'en ai fait l'objet d'un travail semblable à celui que M. Binet a bien voulu présenter de ma part à l'Académie des Sciences dans sa séance du 1er décembre 1845, et qui a été inséré dans le tome XI de ce Journal, page 41.

PREMIÈRE SECTION.

Soient $A = a + b\sqrt{-1}$ et $A_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1}$ les deux nombres proposés ayant pour carrés de leurs modules

$$M = a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad M_1 = a_1^2 + b_1^2 < M;$$

posons

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{a_1 + b_1\sqrt{-1}} = p + q\sqrt{-1}, \tag{1}$$

d'où

$$p = \frac{aa_1 + bb_1}{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Prenons pour quotient $p' + q'\sqrt{-1}$, p' et q' étant les entiers contenus dans p et q. De la sorte, on aura les équations

$$p = p' + \alpha, \quad q = q' + \beta,$$

où α et β désigneront les restes de mêmes signes que les parties entières.

En chassant le dénominateur dans l'équation (1) et mettant ces valeurs pour p et q, on trouve

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a+b\sqrt{-1} &= (p'+q'\sqrt{-1})(a_1+b_1\sqrt{-1}) \\ &\quad + (\alpha+\beta\sqrt{-1})(a_1+b_1\sqrt{-1}), \end{aligned}\right.$$

équation qui conduit, comme on sait, à remplacer dans la recherche du plus grand commun diviseur A et A_1, par A_1 et

$$(3)\qquad A_2 = (\alpha+\beta\sqrt{-1})(a_1+b_1\sqrt{-1}).$$

Le module de A_2, élevé au carré, est

$$(4)\qquad M_2 = (\alpha^2+\beta^2)\,M_1.$$

L'équation (1) donne d'ailleurs

$$(5)\qquad M = (p^2+q^2)\,M_1 = [(p'+\alpha)^2+(q'+\beta)^2]\,M_1.$$

Il existe donc entre les produits MM_1 et M_1M_2 la relation

$$MM_1 = \frac{(p'+\alpha)^2+(q'+\beta)^2}{\alpha^2+\beta^2}M_1M_2 = \left(1+\frac{p'^2+q'^2+2p'\alpha+2q'\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)M_1M_2,$$

dans laquelle tous les termes peuvent être considérés comme positifs et où p' et q' ne sauraient être nuls en même temps à cause de $M > M_1$. Le cas le plus défavorable est celui où $p'=0$, $q'=1$, et l'on voit que, même alors, on aura

$$MM_1 > 2M_1M_2.$$

Ainsi le produit des carrés des modules des nombres à diviser l'un par l'autre, celui de plus grand module par celui de plus petit module, devient plus de moitié moindre à chaque nouvelle opération, et la recherche prendra fin après un nombre de divisions plus petit que l'exposant diminué d'une unité de la plus haute puissance de 2 contenue dans MM_1, ou, ce qui équivaut, plus petit que le nombre obtenu en divisant le logarithme de MM_1 par celui de 2 ou 0,30103, et diminuant de 1 le résultat; ou encore, plus petit que $3{,}32193\,(i+i_1)-1$, i et i_1 désignant les nombres de chiffres de M et M_1.

Le seul cas qui puisse échapper à cette limite est celui où deux M

consécutifs sont égaux ; c'est ce qui arrive, par exemple, quand

$$A = 29 + 13\sqrt{-1}, \quad A_1 = 7 + 4\sqrt{-1},$$

on trouve

$$p' = 3, \quad q' = 0, \quad \alpha = \frac{60}{65}, \quad \beta = -\frac{25}{65}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

et

$$A_2 = 8 + \sqrt{-1};$$

de sorte que l'on a

$$M_1 = M_2 = 65.$$

Alors la série des opérations devient infinie et les valeurs de A_1 et A_2 se reproduisent successivement.

Pour obvier à cet inconvénient, avant de continuer, on divise A_1 ou A_2 par $1 + \sqrt{-1}$ en ayant soin de tenir compte de ce facteur s'il est commun. Le quotient est $\frac{a_1 + b_1}{2} + \frac{a_1 - b_1}{2}\sqrt{-1}$, et l'on voit que le caractère de divisibilité consiste en ce que a_1 et b_1 doivent être tous deux pairs ou tous deux impairs. Si A_1 et A_2 n'admettent cela ni l'un ni l'autre, a_1 et b_1 sont l'un pair et l'autre impair; il en est de même de a_2 et b_2, et, de plus, si a_1 est le plus grand de ces quatre nombres, b_1 est nécessairement le plus petit. En multipliant, au besoin, par ± 1. $\pm\sqrt{-1}$, on peut toujours amener A_1 et A_2 aux formes

$$a_1 \pm b_1\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad a_2 \pm b_2\sqrt{-1},$$

où a_1 est le plus grand des 4 nombres, b_1 le plus petit, et où les signes sont mis en évidence, les signes supérieurs ayant toujours lieu ensemble, ainsi que les inférieurs. On forme alors un nombre

$$A_1 - A_2 = (a_1 - a_2) \pm (b_2 - b_1)\sqrt{-1},$$

dans lequel figurent les différences arithmétiques $a_1 - a_2$ et $b_2 - b_1$, évidemment toutes deux paires ou toutes impaires; cela fait, on divise ce nouveau nombre par $1 + \sqrt{-1}$, et on l'emploie à la place de A_2 : il a un module moindre. En effet, l'équation

$$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$$

donne

$$a_1 - a_2 = (b_2 - b_1)\frac{b_2 + b_1}{a_1 + a_2},$$

et, comme $a_2 > b_1$ et $a_1 > b_2$, on en conclut $a_1 - a_2 < b_2 - b_1 < b_2$; le carré du module de $A_1 - A_2$ est donc moindre que $2b_2^2$, et celui du nombre à employer moindre que b_2^2, à fortiori, moindre que $a_2^2 + b_2^2$.

Avec cette simple préparation, dans le cas très-rare où elle est nécessaire, rien ne peut entraver la marche des opérations ni diminuer la généralité de ce qui précède. Dans l'exemple numérique cité plus haut, on est conduit de la sorte à poursuivre la recherche en remplaçant A_2 par $A'_2 = 2 - \sqrt{-1}$ et $M_2 = 65$ par $M'_2 = 5$. A'_2 se trouve être une quantité première et le plus grand commun diviseur cherché, car il divise A_1 et donne pour quotient exact $2 + 3\sqrt{-1}$.

Les quantités désignées par α et β peuvent être mises sous la forme $\frac{K}{M_1}$, $\frac{K'}{M_1}$, K et K' étant entiers; en substituant ces valeurs dans l'équation (4), on arrive à la relation

$$K^2 + K'^2 = M_1 M_2,$$

qui prouve que le produit de deux M consécutifs est décomposable en deux carrés parfaits, dont les racines sont les numérateurs de α et β.

DEUXIÈME SECTION.

Dans le *Compte rendu* de la séance de l'Académie des Sciences du 15 mars 1847, M. Wantzel (page 431) prend pour p' et q' les nombres entiers les plus voisins de p et q; de la sorte, α et β, au lieu d'être constamment moindres que 1, sont toujours moindres que $\frac{1}{2}$. Comme on l'a vu dans la première section, cela n'est pas nécessaire pour que les modules décroissent; mais, en opérant ainsi, on peut assigner au nombre des divisions à faire une limite plus restreinte. M. Wantzel fait voir que le nombre des opérations ne saurait surpasser le degré de la plus grande puissance de 2 contenue dans le carré du module le plus petit. Cette limite repose sur ce que $\alpha^2 + \beta^2$ est

une quantité inférieure à $\frac{1}{2}$, parce que α et β sont, chacun en particulier, inférieurs à $\frac{1}{2}$.

On peut aisément la remplacer par une limite plus restreinte, en considérant que s'il est possible, dans un cas déterminé, d'avoir $\alpha = \beta = \pm \frac{1}{2}$, cela ne saurait arriver dans plusieurs divisions consécutives. En effet, les équations (4) et (5) donnent

$$M = \frac{(p' + \alpha)^2 + (q' + \beta)^2}{\alpha^2 + \beta^2} M_2 = KM_2,$$

et, semblablement,

$$M_1 = \frac{(p'' + \alpha')^2 + (q'' + \beta')^2}{\alpha'^2 + \beta'^2} M_3 = K'M_3.$$

En ajoutant un accent à chaque lettre dans l'équation (5) et combinant cette équation avec l'équation (4), on trouve encore

$$(6) \qquad (p'' + \alpha')^2 + (q'' + \beta')^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2};$$

de là il résulte $k \overset{=}{>} 5$, ce qui ne peut même avoir lieu deux fois consécutivement, de sorte que si $K' = 5$, on a nécessairement $K > 5$.

Pour prouver ces deux points, remarquons d'abord qu'il est permis de changer les signes des binômes $p' + \alpha$ et $q' + \beta$ dont les carrés entrent seuls dans K; ainsi on atteindra toutes les valeurs possibles de cette dernière quantité en donnant à p' et q' toutes les valeurs entières positives, et à α et β toutes les valeurs positives et négatives numériquement inférieures à $\frac{1}{2}$, ou égales à cette limite. De plus, K étant composé en p' et α comme en q' et β, on peut se dispenser de considérer les hypothèses réciproques; par exemple, après $p' = 0$, $q' = 1$, il est inutile de faire $p' = 1$, $q' = 0$. Cela posé, partons du cas particulier où $p' = 0$, $q' = 1$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, dans lequel

$$K = 1 + \frac{1 + 2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = 5.$$

Si l'on fait décroître α, K augmente; si c'est β qui diminue de ε, le

numérateur décroît de 2ε, quantité plus grande que la diminution $2\varepsilon - \varepsilon^2$ subie par le dénominateur; on peut affirmer que le nombre fractionnaire augmente encore. β ne peut d'ailleurs être négatif dans ce cas, parce qu'il en résulterait

$$p = p' + \alpha = 0 + \alpha < 1 \quad \text{et} \quad q = q' + \beta = 1 + \beta < 1,$$

ce qui entraînerait l'inégalité $M < M_1$ contraire à l'hypothèse. On peut donc affirmer qu'avec $p' = 0$, $q' = 1$ on a toujours $K > 5$, si ce n'est lorsque $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$, ce qui donne $K = 5$. $p' = 0$ et $q' = 0$ ne peut se supposer, puisque cela donnerait $p^2 + q^2 < 1$; comme $p' = 0$, $q' = 1$ et β négatif. Si, maintenant, nous faisons croître q', le binôme $q' + \beta$ croîtra, hormis le cas où q' augmentant de 1, β passerait de $+\frac{1}{2}$ à $-\frac{1}{2}$, et alors même $q' + \beta$ ne diminuerait point; on peut en dire autant pour $p' + \alpha$. Ainsi K est constamment plus grand que 5, si ce n'est pour

$$p' = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q' = 1, & \alpha = \pm\frac{1}{2}, \quad \beta = \quad \frac{1}{2}, \\ q' = 2, & \alpha = \pm\frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$p' = 1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q' = 1, & \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \quad \frac{1}{2}, \\ q' = 2, & \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

et les hypothèses réciproques, cas dans lesquels on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}, \quad (p' + \alpha)^2 + (q' + \beta)^2 = \frac{5}{2}.$$

Lorsque $K' = 5$, K est plus grand que 5, puisque l'équation (6) donne

$$\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{5}{2},$$

et, par suite,

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}.$$

De ces principes on déduit facilement la limite cherchée: soient,

comme précédemment,

$$M,\ M_1,\ M_2,\ldots,\ M_{n-2},\ M_{n-1},\ M_n,$$

les carrés des modules des nombres proposés et des restes successifs, y compris M_n qui est celui du plus grand commun diviseur au moins égal à 1. On aura

$$M \geqq 5M_2,\quad M_2 \geqq 5M_4,\ldots,\quad M_{n-2} \geqq 5M_n \geqq 5.$$

Combinant ces inégalités, on arrive de suite à la relation

$$(7)\qquad M > 5^{\frac{n}{2}} = (\sqrt{5})^n,$$

où $\sqrt{5}$ remplace avec avantage le nombre 2 de M. Wantzel. Le cas de n impair n'altère pas la généralité de ce résultat, car alors on arrive de la même manière à

$$M > (\sqrt{5})^{n-3} M_{n-3};$$

et, d'ailleurs M_n est au moins 1, M_{n-1} au moins 2, M_{n-2} au moins 5 fois M_n ou 5, ce qui n'est pas compatible avec $M_{n-3} = 5$ fois M_{n-1} ou 10, et exige M_{n-3} au moins égal à 13, attendu que 11 et 12 ne sont pas décomposables en carrés parfaits : on peut donc poser l'inégalité

$$M_{n-3} \geqq 13 > (\sqrt{5})^3,$$

qui, combinée avec la précédente, redonne la relation (7), toujours vraie, si ce n'est pour n impair et < 3, c'est-à-dire $n = 1$. Dans ce cas, qui n'est pas compris dans la démonstration, il peut arriver, en effet, que $M = 2$, $M_n = M_1 = 1$, et il n'est pas vrai que l'on ait $M = 2 > \sqrt{5}$; mais alors le nombre des divisions à faire est nul. Le nombre des divisions étant évidemment $n - 1$, on peut toujours affirmer que la recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres complexes de la forme $a + b\sqrt{-1}$, où a et b sont entiers, exige un nombre d'opérations inférieur de plus d'une unité à l'exposant de la plus haute puissance de $\sqrt{5}$, contenue dans le carré du plus grand module, ou simplement inférieur à l'exposant de la plus haute

puissance de $\sqrt{5}$, contenue dans le carré du plus petit module; ce qui se démontrerait de même en partant de M_1 au lieu de M. Cet exposant n'est d'ailleurs autre chose que le quotient obtenu en divisant le logarithme du module carré par le logarithme de $\sqrt{5} = 0,349485$, et l'on peut substituer à cette division, quand on ne tient pas à une limite très-approchée, le produit du nombre des chiffres du carré, par 2,8614, et, à fortiori, par 3.

Les valeurs des M sont d'ailleurs nécessairement toutes comprises dans la formule $x^2 + y^2$ où x et y sont des entiers incomplexes, et même on ne peut avoir $M_n = 1$ qu'autant que les deux nombres proposés sont premiers entre eux. Alors M_{n-1} peut être 2; M_{n-2} ne peut être 5, à moins que M_{n-2} ne soit M; car $2 \times 5 = 10 = 3^2 + 1^2$ donnerait pour α ou β la valeur $\pm \frac{3}{5}$, numériquement plus grande que $\frac{1}{2}$. M_{n-1} étant pair, M_{n-2} ne peut être 8, car $1 + \sqrt{-1}$ serait diviseur commun, et M_n serait > 1. Ainsi, en remontant la série des M, on voit que, après 1 et 2, on arrive à 9 au moins. En continuant cette discussion, calculant α et β à l'avance au moyen de l'équation (3), et s'aidant, pour abréger, de l'équation (2), où les seules indéterminées sont p' et q', qui représentent des nombres entiers, on voit que M_{n-3} est au moins 32, et M_{n-4} au moins 121 : les M croissent donc beaucoup plus rapidement encore que ne l'indique la limite trouvée plus haut; en conséquence, elle pourrait être plus approchée. Elle ne jouit pas de la propriété de ne pouvoir être remplacée par une meilleure, comme cela a lieu pour la plupart des diverses limites que j'ai données, au sujet du plus grand commun diviseur en arithmétique élémentaire, lorsqu'on ne les simplifie pas en remplaçant le logarithme du plus petit des nombres proposés par le nombre de ses chiffres.

TROISIÈME SECTION.

Nous avons vu précédemmment comment on peut, dans la recherche du plus grand commun diviseur, remplacer les deux nombres proposés par d'autres dont les modules sont de plus en plus petits à mesure que l'on avance dans la série des opérations. On peut aussi se proposer de trouver deux nombres ayant le même plus grand commun

diviseur que les nombres proposés et présentant certaines particularités; tels, par exemple, que l'un d'eux soit incomplexe.

Soient m, n, m', n' des indéterminées entières incomplexes, et posons

$$\begin{aligned} A' &= m\,(a + b\sqrt{-1}) + n\,(a_1 + b_1\sqrt{-1}) \\ &= (ma + na_1) + (mb + nb_1)\sqrt{-1}, \\ A'_1 &= m'(a + b\sqrt{-1}) + n'(a_1 + b_1\sqrt{-1}) \\ &= (m'a + n'a_1) + (m'b + n'b_1)\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

le plus grand commun diviseur entre A et A_1 divisera évidemment A' et A'_1. Posons, en outre,

$$LA' + L'A'_1 = A, \quad HA' + H'A'_1 = A_1,$$

c'est-à-dire

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &[(Lm + L'm')\,a + (Ln + L'n')\,a_1] \\ &+ [(Lm + L'm')\,b + (Ln + L'n')\,b_1]\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1}, \end{aligned} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &[(Hm + H'm')\,a + (Hn + H'n')\,a_1] \\ &+ [(Hm + H'm')\,b + (Hn + H'n')\,b_1]\sqrt{-1} = a_1 + b_1\sqrt{-1}. \end{aligned} \right.$$

L, L', H, H' désignant encore des entiers incomplexes: on pourra affirmer que le plus grand commun diviseur entre A' et A'_1 divise A et A_1, et, par suite, qu'il est le même que le plus grand commun diviseur cherché. Mais il faudra vérifier les équations (8) et (9) pour des valeurs quelconques de a, b, a_1, b_1, ce qui exige

$$(10) \qquad Lm + L'm' = 1,$$

$$(11) \qquad Ln + L'n' = 0;$$

$$(12) \qquad Hm + H'm' = 0,$$

$$(13) \qquad Hn + H'n' = 1.$$

L'équation (13) montre que n et n' sont des quantités premières entre elles; et, cela étant, l'équation (11) prouve que L est un multiple de n', $L = n't$, et L' un multiple de n, $L' = -nt$; ce qui change l'équation (10) en

$$mn' - m'n = \frac{1}{t},$$

et fait voir que t n'admet que les valeurs $+1$ et -1, et que m, n, m', n' doivent vérifier l'équation

$$(14)\qquad mn' - m'n = \pm 1.$$

A cause de la symétrie des calculs, l'équation (12) n'amène pas d'autre condition. m et n peuvent donc être pris arbitrairement parmi les quantités premières entre elles, pourvu qu'on déduise ensuite m' et n' de l'équation (14). Veut-on, par exemple, que A' soit incomplexe et égal à $ma + na_1$; on posera

$$mb + nb_1 = 0 = mB + nB_1,$$

B et B_1 étant les quotients de b et b_1 par leur plus grand commun diviseur, et on prendra $m = B_1$, $n = -B$: de la sorte, m et n seront des quantités premières entre elles, et on aura

$$A' = aB_1 - a_1B, \quad A'_1 = (m'a + n'a_1) \pm D\sqrt{-1},$$

D étant le plus grand commun diviseur de b et b_1; m' et n' étant deux des valeurs que fournit l'équation

$$B_1 n' + Bm' = \pm 1.$$

A_1 et A'_1, comparés à A et A_1, offrent certains avantages : le plus grand commun diviseur de A' et du carré M'_1 du module de A'_1 est le carré du module du plus grand commun diviseur cherché, ce que l'on ne peut affirmer pour A et A'. Cela permet de s'assurer plus promptement si les nombres sont premiers entre eux.

Soient, par exemple,

$$A_1 = 141 + 106\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad A = 154 - 153\sqrt{-1},$$
$$M_1 = 31117 \quad \text{et} \quad M = 47125,$$

b et b_1 étant évidemment premiers entre eux; on a pour valeur de A', abstraction faite du signe,

$$A' = 141 \times 153 + 106 \times 154 = 37897.$$

On peut en avoir facilement une moindre. Il suffit, pour que A' soit une différence arithmétique au lieu d'une somme, de multiplier A

par $\sqrt{-1}$, et de prendre

$$A_1 = 141 + 106\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad A = 153 + 154\sqrt{-1};$$

alors

$$B_1 = 53, \quad B = 77, \quad D = 2,$$

et

$$A' = 141 \times 77 - 53 \times 153 = 2748.$$

L'équation (13) devient

$$77n' + 53m' = \pm 1;$$

elle donne $n' = 11$, $m' = -16$ avec le signe inférieur, et, par suite, on a

$$A'_1 = 573 + 2\sqrt{-1}, \quad M'_1 = 328333,$$

en changeant le signe de A'_1, ce qui est permis. M'_1 et A' n'ont pas de commun diviseur, et l'on est assuré que les nombres proposés sont premiers entre eux. M et M_1 ont, au contraire, pour plus grand commun diviseur, 29, ce qui laisse la question indécise.

On peut aussi profiter des indéterminées pour se procurer deux nombres dont l'un ait un module beaucoup plus petit que M_1, ce qui abrége la recherche. Dans l'exemple précédent, $m = n = 1 = n'$ et $m' = 0$ conduisent à remplacer A et A_1 par A_1 et $12 + 48\sqrt{-1}$, dont le module 2448 est plus petit que 31117.

APERÇU THÉORIQUE

SUR LE FROTTEMENT DE ROULEMENT;

Par M. STEICHEN,

Professeur à l'École militaire de Bruxelles.

---

§ I.

Il semble résulter des observations faites par Coulomb et d'autres physiciens, que la résistance au roulement est, du moins dans certaines circonstances, proportionnelle à la charge du rouleau ou de la roulette, et en raison renversée du rayon; tandis que, d'après les observations de M. Dupuit, cette résistance paraît plutôt se rapprocher de la loi de la raison inverse de la racine carrée du rayon. Il y a des cas particuliers où cette loi de Dupuit se trouve pleinement confirmée par les principes de la théorie. Pour justifier notre assertion, nous résoudrons le problème de la roulette à axe fixe, déjà traité et profondément éclairci, comme tant d'autres questions intéressantes, par M. Poncelet dans son Cours de Machines à l'École de Metz.

Soit, *fig.* 1, *Pl. I*, une roulette à axe fixe, portant une charge P, posée sur le plateau $\overline{AB}$, et soit p le poids de la roulette elle-même, celui du plateau se trouvant compris dans P; il est évident que la force de traction horizontale F n'a d'autre résistance à vaincre que le frottement de glissement sur l'axe fixe o, et celui du roulement de la roue sous le plateau. Nommons m le point de contact du cercle de l'œil de la roulette avec l'essieu circulaire fixe dans l'état de mouvement permanent; α l'angle de la résultante N des forces $(P + p)$ et F, avec la ligne droite moC qui joint m aux centres o et C de l'axe et de l'œil; β l'angle de N avec la verticale de $P + p$ ou du centre: on obtiendra, par le principe des moments virtuels effectifs et par celui

des moments de rotation des forces autour du point m,

$$(1)\qquad F\left[1+f\frac{r}{R}\sin(\alpha-\beta)\right]=f\frac{r}{R}(P+p)\cos(\alpha-\beta)+\frac{A'P}{\varphi(R)},$$

équation dans laquelle f exprime le coefficient du frottement de glissement sur l'axe fixe, R le rayon de la roulette, r celui de son œil, A′ le coefficient de la résistance au roulement, entre la roulette et le plateau, tandis que $\frac{A'}{\varphi(R)}$ exprime la loi inconnue de cette résistance en fonction du rayon R, les surfaces roulantes étant censées complétement dépourvues d'aspérités; car, dans l'hypothèse contraire, il faudrait ajouter au second membre de l'équation (1) un terme correspondant au degré d'élévation du fardeau que nécessiterait la présence de telles aspérités.

Mais puisque l'œil de la roulette peut rouler autour du point m, il faut qu'on ait encore, par les moments de rotation,

$$(2)\qquad F\left[1-\frac{r}{R}\cos(\alpha-\beta)\right]=(P+p)\frac{r}{R}\sin(\alpha-\beta),$$

équation qui exprime aussi que la résultante N passe par le point de contact m. On obtient ensuite, et évidemment, par la décomposition de N en une force tangentielle et en une force normale,

$$(3)\qquad \operatorname{tang}\alpha=f.$$

Mais comme les deux forces F et $(P+p)$ sont, dans le cas actuel, rectangulaires entre elles, on obtient immédiatement cette quatrième équation de condition

$$(4)\qquad (P+p)\operatorname{tang}\beta=F;$$

et néanmoins, il n'y a tout au plus que trois inconnues distinctes, α, β, F; or, en égalant entre elles les valeurs de $F:(P+p)$, tirées des égalités (2) et (4), on obtient, par une simple réduction, l'équation de condition suivante :

$$(a)\qquad R\sin\beta-r\sin\alpha=0.$$

Mais si l'on abaisse du centre C de l'œil de la roulette une perpendi-

culaire $\overline{CV}$ sur la ligne Tm de la résultante, on a, par le triangle TCV,

$$\overline{CV} = R \sin \beta;$$

et, dans le triangle CmV,

$$\overline{CV} = r \sin \alpha.$$

Il suit de là que l'égalité (a) se trouve en effet vérifiée indépendamment de toute considération mécanique, et qu'elle donne, en même temps, β en valeurs de r, R, α ou f. Cela posé, on pourra, par conséquent, négliger la considération de l'équation (2), en tenant compte de celle des équations (4) et (a), qui fait connaître β d'une manière purement géométrique; mais puisque α, β se trouvent déterminées par les équations (3) et (a), et que, par l'équation (4), la force F est une fonction connue de α, β, $\overline{P+p}$, il faut qu'en substituant dans l'équation (1) cette valeur de F, on obtienne un résultat qui subsiste entre quantités connues. Cette substitution donne

$$\frac{A'P}{\varphi(R)} = \overline{P+p}\left[\tang \beta + f\frac{r}{R}\tang \beta \sin(\alpha-\beta) - f\frac{r}{R}\cos(\alpha-\beta)\right].$$

Mais en remplaçant f par $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, et $\frac{r}{R}$ par $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, on obtient, par une réduction facile, le second facteur du second membre égal à

$$\tang \beta - \tang \beta = 0;$$

de sorte que l'on a ainsi

$$\frac{A'P}{\varphi(R)} = 0.$$

De là il faut conclure que, quand deux surfaces sont parfaitement planes et dépourvues de toutes aspérités, le frottement de roulement est absolument nul entre elles, quelle que soit la pression; et la force de traction F a, par conséquent, la valeur fournie par l'égalité (4), après qu'on y aura mis la valeur de tang β en f, r, R; d'où résulte

$$(b) \qquad F = (P+p)\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = (P+p)\frac{r}{R}\frac{f}{\sqrt{1+f^2-f^2\frac{r^2}{R^2}}}.$$

Ainsi les équations (3), (a) et (b) font connaître les valeurs des trois

inconnues α, β, F, et notre question se trouve résolue complétement. De plus, cette solution, comme celle de quelques questions analogues, mène à l'idée d'attribuer la résistance du roulement aux aspérités des surfaces frottantes, laquelle est due ainsi à ce que la charge se soulève en effet d'une petite quantité autour de chaque petit obstacle; car, pour le démontrer, proposons-nous de déterminer la valeur de la force φ capable de vaincre et d'équilibrer toutes les résistances dans le cas de la question précédente, mais dans la supposition que, la surface du plateau restant très-unie, la roue soit munie d'une petite saillie de hauteur h dans le sens du rayon et en contact avec le dessous du plateau, en un point a, *fig.* 2, en arrière du point T.

Soit X la force verticale ascendante qui, dans l'état de repos, serait capable d'équilibrer le poids P autour du point a; on aura donc

$$X\overline{ab} = P\overline{aT}.$$

Le point a supporte donc une pression verticale $P' = P - P\left(\frac{aT}{ab}\right)$; l'autre partie $P\left(\frac{aT}{ab}\right)$ fera incliner le plateau si la force X n'existe pas, ou bien elle sera détruite par le dos du moteur, produisant la force de traction horizontale. La pression en a occasionnera un frottement de glissement $f_1 P \frac{bT}{ab}$ ou $f_1 P'$ pour abréger, et c'est par l'effet de cette force passive que le plateau devient comme adhérent à la saillie de la roue à l'instant même où celle-ci vient toucher et frapper le dessous du plateau en a. Mais la force φ, qui est maintenant requise pour l'équilibre, doit surpasser la force F, calculée plus haut; car non-seulement elle doit vaincre la résistance entre l'œil et l'essieu, il faut encore qu'elle soulève un peu, pendant chaque moment, la charge P autour du centre C. De plus, cette force φ sera variable avec la distance $\overline{aT}$; mais il suffit de la calculer dans sa valeur initiale; car, en y changeant ensuite la valeur initiale en une valeur comprise entre zéro et celle-là, on aurait au besoin la valeur de la force motrice variable.

§ II.

Nommons toujours α l'angle de la résultante N' des forces φ et $(P'+p)$ avec la droite moC, tirée par le point de contact m aux centres o, C; β' l'angle de N' avec la verticale. Remarquons aussi que le point d'intersection des deux forces φ et $P'+p$ n'est pas en a, mais entre a et T, et très-voisin de a si p est censé très-petit par rapport à P; soit a' ce point d'intersection. Dans le mouvement utile, la résultante N' agira donc de a' vers m, ce qui donne toujours en m, suivant mC, une force normale $N'\cos\alpha$, partant un frottement $fN'\cos\alpha$. Mais il se présente maintenant deux questions à résoudre: celle du mouvement initial singulier et celle de la supposition d'un point de contact permanent.

A partir du repos et jusqu'à ce que le point de contact m, pour lequel on a toujours

$$\tang \alpha = f,$$

soit atteint, la force motrice, qui est censée croître par degrés insensibles d'abord, finira par avoir une valeur ψ, suffisante pour faire rouler l'œil de la roulette sur l'essieu fixe. Rapportons ce mouvement de roulement au centre fixe o de l'essieu, et admettons que l'angle de rotation soit déjà ε; le centre C de l'œil et tous les points de la roulette ont donc tourné autour de o, en roulant sur l'essieu d'un angle ε. Le centre C s'est donc élevé d'un arc $(r-\rho)\varepsilon$, qui vaut en projection verticale $(r-\rho)(1-\cos\varepsilon)$, et en projection horizontale, $(r-\rho)\sin\varepsilon$. Le poids $P'+p$ s'est donc élevé d'une quantité verticale égale à cette première projection, et le moment virtuel du poids pour l'instant suivant sera

$$(P'+p)(r-\rho)\sin\varepsilon\, d\varepsilon.$$

Mais la roulette ayant roulé de n en m sur l'essieu, le point de contact T de la force motrice ψ a décrit l'arc $TT' = (R-r+\rho)\varepsilon$, et pendant l'instant qui suit, il décrira, par conséquent, le chemin $(R-r+\rho)\,d\varepsilon$ ou T'T''; et cet élément faisant avec la ligne primitive de ψ un angle ε, on obtient, pour le moment virtuel contemporain

de la force ψ,

$$\psi(R - r + \rho)\, d\varepsilon \cos\varepsilon.$$

On voit donc que pour faire rouler un cercle, percé d'un œil sur un axe fixe, la charge $P' + p$, on a besoin d'une force motrice ψ, donnée par l'équation

$$\psi(R - r + \rho)\cos\varepsilon = (P' + p)(r - \rho)\sin\varepsilon;$$

et c'est cet effort que l'on peut nommer ici le frottement de roulement du cercle mobile sur le cercle fixe. On déduit de là

$$\psi = (P' + p)\left(\frac{r-\rho}{R}\right)\operatorname{tang}\varepsilon,$$

ce qui fait ψ proportionnel à la charge $P' + p$, et en raison inverse du rayon de la roue.

Si l'on a $r = \rho$, alors $\psi = 0$, et le frottement de glissement se substitue dès l'instant même qu'on voudra produire le mouvement.

Mais le mouvement initial singulier cessera dès qu'une fois la résultante des forces φ passe par m, et que sa composante tangentielle devient strictement égale et contraire au frottement de glissement en ce point. Cette résultante N', correspondante à la nouvelle force de traction φ, passera, non pas par le point a même, mais par un point voisin, compris entre a et T_1, *fig.* 3; car la force verticale est non pas P', mais $P' + p$: en outre, N' fera avec la ligne moC' un angle α, et avec la verticale un angle β'. Il s'agit donc de déterminer les quantités α, β', φ; or on a immédiatement

$$\operatorname{tang}\alpha = f,$$

et ensuite

$$\operatorname{tang}\beta' = \frac{\varphi}{P' + p}. \tag{1}$$

Eu égard à la condition

$$N'\cos\alpha = (P' + p)\cos(\alpha - \beta') - \varphi\sin(\alpha - \beta'),$$

on obtient, par le principe des moments effectifs,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(R + h)\sin\lambda = P'(R + h)\cos\lambda &+ f(P' + p)\cos(\alpha - \beta')\, r \\ &- f\varphi\sin(\alpha - \beta')\, r. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

On désigne par λ l'angle de la saillie ab placée suivant le rayon $C'b$ prolongé, avec l'horizontale du centre C'. En nommant encore h la hauteur de cette saillie, on a

$$aT_1 = (R + h)\cos\lambda = \sqrt{2Rh + h^2}$$

et

$$\sin\lambda = R : (R + h).$$

Ainsi λ est connu et déterminé dès que la hauteur h est donnée; il n'y a donc que deux inconnues distinctes β', φ, et les équations (1) et (2) suffisent pour les déterminer.

Nommons a' le point d'application de la force $P' + p$ entre a et T_1; on aura

$$\frac{a'T_1}{aT_1} = \frac{P'}{P'+p}, \quad \tang\beta' = \frac{mg}{a'g} = \frac{\overline{a'T_1} + r\sin(\alpha - \beta')}{R - r\cos(\alpha - \beta')},$$

ou, en mettant pour $a'T_1$ sa valeur,

$$\text{(3)} \qquad \tang\beta' = \frac{P'}{P'+p}\,\frac{(R+h)\cos\lambda}{R - r\cos(\alpha-\beta')} + \frac{r\sin(\alpha-\beta')}{R - r\cos(\alpha-\beta')}.$$

De cette équation on pourra déduire la valeur de β', quoiqu'elle ne soit pas encore résolue par rapport à l'inconnue. Mais en substituant, dans l'équation (2), la valeur

$$\varphi = (P' + p)\tang\beta',$$

on en déduit encore, pour β',

$$\text{(4)} \qquad \tang\beta' = \frac{P'}{P'+p}\,\frac{(R+h)\cos\lambda}{R + fr\sin(\alpha-\beta')} + \frac{fr\cos(\alpha-\beta')}{R + fr\sin(\alpha-\beta')}.$$

Il faut donc que ces deux équations s'accordent à donner pour β' la même valeur, et qu'elles offrent, par conséquent, une vérification de nos raisonnements et des résultats établis. Pour opérer cette vérification et pour obtenir à la fois une équation plus simple, posons

$$P'(P' + p) = \mu \quad \text{et} \quad \alpha - \beta' = \varpi.$$

Les deux valeurs de $\tang\beta'$ obtenues ci-dessus, étant égalées entre elles, donnent l'équation de condition suivante :

$$\mu(R+h)\cos\lambda\left(\frac{1}{R + fr\sin\varpi} - \frac{1}{R - r\cos\varpi}\right) + \frac{fr\cos\varpi}{R + fr\sin\varpi} - \frac{r\sin\varpi}{R - r\cos\varpi} = 0.$$

Si l'on réduit cette dernière d'après la condition de $f = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, on obtient l'équation suivante pour β' :

$$(5) \qquad \sin\beta' - \mu\frac{R+h}{R}\cos\lambda\cos\beta' - f\frac{r}{R}\cos\alpha = 0.$$

Mais telle est précisément la forme à laquelle on peut ramener l'équation (3) par le développement de $\sin(\alpha - \beta')$, $\cos(\alpha - \beta')$. Ainsi la combinaison des égalités (3) et (4) donne pour β' la même valeur que l'équation (3), considérée isolément; de sorte qu'elles sont équivalentes l'une à l'autre. Cette vérification étant faite, il en résulte qu'il est permis de négliger l'égalité (3), et de tenir seulement compte des égalités (1) et (2), auxquelles on est conduit immédiatement et qui suffisent pour avoir φ et β'.

Si l'on veut se borner à une approximation, l'égalité (2) suffira seule; en observant que

$$(R + h)\sin\lambda = R,$$

on en déduit

$$\varphi = P'\frac{(R+h)\cos\lambda}{R + fr\sin(\alpha - \beta')} + f(P' + p)\frac{r\cos(\alpha - \beta')}{R + fr\sin(\alpha - \beta')}.$$

En négligeant d'abord $fr\sin(\alpha - \beta')$ par rapport R, et prenant

$$\cos(\alpha - \beta') = 1,$$

on obtient une première approximation

$$\varphi' = P'\frac{\sqrt{2Rh + h^2}}{R} + f(P' + p)\frac{r}{R} = P'\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{R}} + f(P' + p)\frac{r}{R}.$$

On voit par là que si la surface de la roue est seulement couverte de très-petites aspérités, chacune de celles-ci exigera un effort *extraordinaire* $P'\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{R}}$, directement proportionnel à la racine carrée de la hauteur de chaque saillie, et en raison réciproque de la racine carrée du rayon de la roue ou roulette.

Or, comme ces saillies se succèdent incessamment, il faut un effort continu soumis à cette loi. C'est dans cet effort ainsi requis qu'il faut faire consister la résistance au roulement, du moins dans le cas actuel

et les analogues, puisqu'il est déjà démontré que, les surfaces étant parfaitement unies, cette résistance n'existe pas ou qu'elle est nulle. La loi de Coulomb, qui peut être plus ou moins exacte, selon la nature des surfaces frottantes, ne paraît donc pas admissible pour le cas spécial où ces surfaces seraient très-unies en apparence, très-rigides, mais, en réalité, pourvues d'aspérités plus ou moins sensibles.

Ayant une fois une valeur φ' de φ, on obtient immédiatement une valeur correspondante de β' par l'égalité (1), après avoir remplacé φ par φ'; on pourra ensuite pousser l'approximation aussi loin qu'on voudra, en employant les égalités (1) et (2) alternativement.

Quant à la plus grande limite de l'angle de roulement ou de ε, sur l'essieu, elle sera $\varepsilon_1 = \alpha - \beta'$, et l'arc correspondant sur l'essieu aura la valeur $\rho\,(\alpha - \beta')$; c'est la longueur de l'arc nm.

Pour savoir si le point de contact m sera toujours en avant de la verticale passant par le centre de l'essieu, il faut développer $\operatorname{tang}(\alpha - \beta')$; ce qui donne, en vertu de l'égalité (1),

$$\operatorname{tang}(\alpha - \beta') = \left(f - \frac{\varphi}{P'+p}\right) \left(1 + f\frac{\varphi}{P'+p}\right).$$

Et, en vertu de la valeur de φ en fonction de P', p, h, v, cette valeur sera généralement positive; mais si la hauteur h devenait fort sensible ou fort grande, le contraire pourrait avoir lieu.

Remarque. La résistance au roulement doit être soumise à une loi plus ou moins compliquée à laquelle on ne pourra parvenir qu'en établissant les équations d'équilibre, eu égard aux forces de toute espèce qui agissent au point de contact. En introduisant dans la formule qui exprimerait cette loi d'une manière exacte, de certaines hypothèses particulières, concernant l'élasticité, la compressibilité des surfaces de contact, on doit retrouver des résultats simplifiés qui reproduisent tantôt la loi de Coulomb, tantôt celle de Dupuit, d'une manière au moins approchée.

…frottement de roulement, par M. Morin.

Fig. 2.

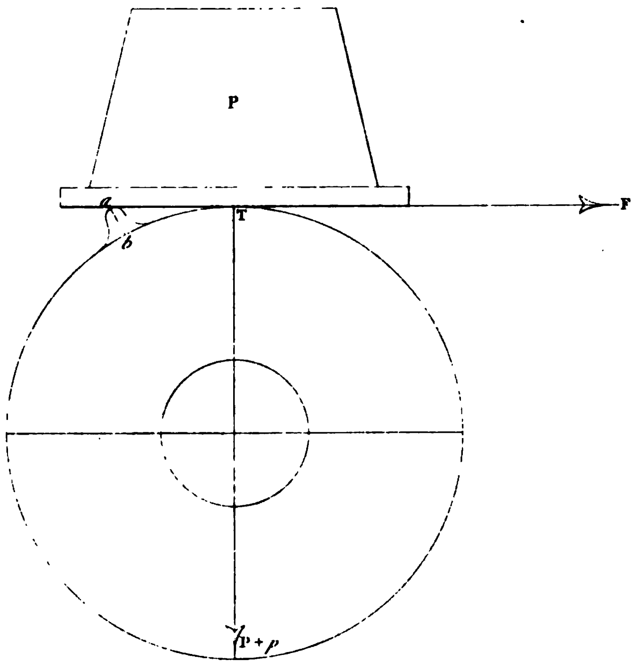
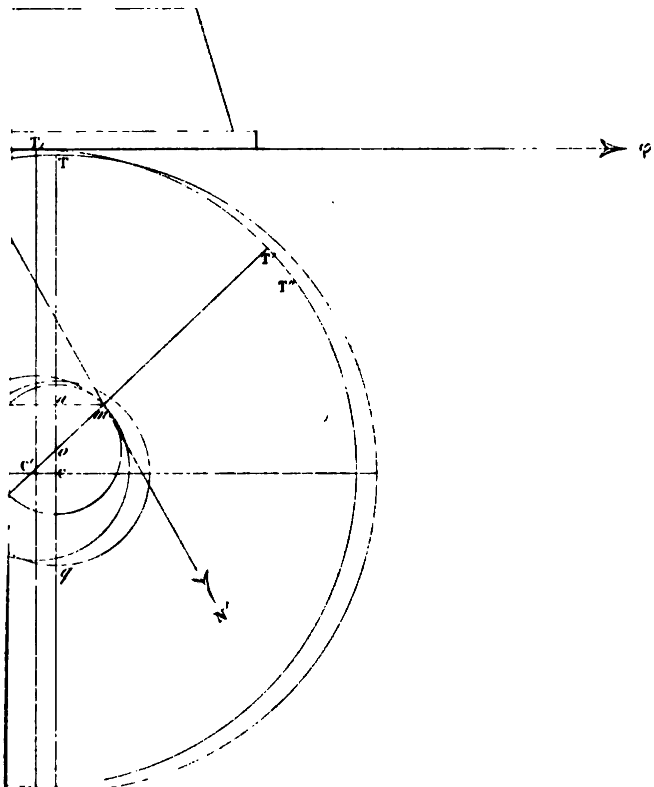


Fig. 3.



E. Wormser sc.

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2;$$

PAR M. J.-A. SERRET.

I.

La question que je me suis proposé de résoudre est la suivante :

x, y, z, s étant quatre fonctions d'une variable indépendante θ, assujetties à vérifier l'équation

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

exprimer sous forme finie, et sans aucun signe d'intégration, les valeurs générales de ces fonctions.

Il est évident qu'on satisfait à l'équation précédente en prenant pour x, y, z et s les coordonnées rectangulaires et l'arc d'une courbe quelconque, d'où il suit que les valeurs générales de x, y, z et s doivent contenir dans leur expression deux fonctions arbitraires de la variable indépendante.

Considérons une courbe quelconque; la surface développable, lieu géométrique de ses tangentes, pourra être représentée par l'ensemble des deux équations

$$z = px + qy - u,$$
$$0 = x\,dp + y\,dq - du,$$

où p, q et u sont des fonctions d'un paramètre θ, ayant respectivement pour différentielles dp, dq, du; et la courbe elle-même, qui est l'arête de rebroussement de la surface, sera représentée par l'ensemble

des trois équations

$$(2)\qquad \begin{cases} z = px + qy - u, \\ 0 = xdp + ydq - du, \\ 0 = xd^2p + yd^2q - d^2u; \end{cases}$$

on déduit de là les valeurs de x, y, z en fonction du paramètre θ que nous prendrons pour variable indépendante; savoir,

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{dq\,d^2u - du\,d^2q}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}, \\ y = \dfrac{du\,d^2p - dp\,d^2u}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}, \\ z = px + qy - u. \end{cases}$$

Les équations (2), combinées avec celles qu'on en déduit par la différentiation, donnent

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp\,dx + dq\,dy = 0,$$
$$d^2p\,dx + d^2q\,dy = d^3u - x\,d^3p - y\,d^3q,$$

d'où l'on tire

$$(4)\qquad \begin{cases} dx = \dfrac{d^3u - x\,d^3p - y\,d^3q}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}\,dq, \\ dy = -\dfrac{d^3u - x\,d^3p - y\,d^3q}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}\,dp, \\ dz = \dfrac{d^3u - x\,d^3p - y\,d^3q}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}\,(p\,dq - q\,dp). \end{cases}$$

Portant ces valeurs de dx, dy, dz dans l'équation proposée, et extrayant ensuite la racine carrée des deux membres, on a

$$(5)\qquad ds = \frac{d^3u - x\,d^3p - y\,d^3q}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}\sqrt{dq^2 + dp^2 + (p\,dq - q\,dp)^2}.$$

Enfin, mettant à la place de x et y les valeurs fournies par les équa-

tions (3), et faisant, pour abréger,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \frac{d\theta^2\sqrt{dq^2+dp^2+(p\,dq-q\,dp)^2}}{dq\,d^2p-dp\,d^2q},\\ B &= -\frac{d\theta\,(dq\,d^3p-dp\,d^3q)\sqrt{dq^2+dp^2+(p\,dq-q\,dp)^2}}{(dq\,d^2p-dp\,d^2q)^2},\\ C &= \frac{(d^2q\,d^3p-d^2p\,d^3q)\sqrt{dq^2+dp^2+(p\,dq-q\,dp)^2}}{(dq\,d^2p-dp\,d^2q)^2}, \end{aligned}\right.$$

la valeur de ds sera

$$ds = A\frac{d^3u}{d\theta^3}d\theta + B\frac{d^2u}{d\theta^2}d\theta + C\frac{du}{d\theta}d\theta;$$

en intégrant par parties chaque terme de ds, on trouve

$$\int A\frac{d^3u}{d\theta^3}d\theta = A\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{dA}{d\theta}\frac{du}{d\theta} + \frac{d^2A}{d\theta^2}u - \int\frac{d^3A}{d\theta^3}u\,d\theta,$$

$$\int B\frac{d^2u}{d\theta^2}d\theta = B\frac{du}{d\theta} - \frac{dB}{d\theta}u + \int\frac{d^2B}{d\theta^2}u\,d\theta,$$

$$\int C\frac{du}{d\theta}d\theta = Cu - \int\frac{dC}{d\theta}u\,d\theta,$$

et l'on aura, pour la valeur de s,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} s = A\frac{d^2u}{d\theta^2} - \left(\frac{dA}{d\theta} - B\right)\frac{du}{d\theta} + \left(\frac{d^2A}{d\theta^2} - \frac{dB}{d\theta} + C\right)u\\ -\int\left(\frac{d^3A}{d\theta^3} - \frac{d^2B}{d\theta^2} + \frac{dC}{d\theta}\right)u\,d\theta. \end{aligned}\right.$$

Or les quantités A, B, C ne contiennent pas u, qui doit être une fonction arbitraire de θ; on pourra donc exprimer s sous forme finie, en posant

$$(8)\qquad u = \frac{\psi'(\theta)}{\dfrac{d^3A}{d\theta^3} - \dfrac{d^2B}{d\theta^2} + \dfrac{dC}{d\theta}},$$

$\psi'(\theta)$ désignant la dérivée d'une fonction arbitraire $\psi(\theta)$, car on aura

$$(9)\qquad s = A\frac{d^2u}{d\theta^2} - \left(\frac{dA}{d\theta} - B\right)\frac{du}{d\theta} + \left(\frac{d^2A}{d\theta^2} - \frac{dB}{d\theta} + C\right)u - \psi(\theta);$$

et, en remplaçant u par sa valeur donnée par l'équation (8), dans les équations (3) et (9), on aura les valeurs de x, y, z et s exprimées sous forme finie, et sans aucun signe d'intégration. Ces expressions contiendront trois fonctions de θ, $\psi(\theta)$, p et q, dont deux seulement doivent être considérées comme arbitraires; car on peut évidemment, sans altérer la généralité de nos résultats, prendre pour θ l'une des deux quantités p et q, ou égaler, si l'on veut, l'une de ces deux quantités à telle fonction de θ que l'on voudra. La variable indépendante que nous avons laissée indéterminée doit être choisie de manière à avoir les formules les plus simples possibles; c'est un détail dont nous allons nous occuper dans le paragraphe suivant: mais remarquons, en terminant, que la question que nous nous sommes posée est complétement résolue par ce qui précède, et aussi que la même méthode s'étendrait, sans aucune modification, à l'équation plus générale

$$dx^2 + \ldots + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

contenant un nombre quelconque m de variables $x, \ldots, y, z$.

On substituerait, en effet, à ces m variables, m autres quantités déterminées par les m équations

$$\begin{aligned}
z &= px + \ldots + qy - u,\\
0 &= xdp + \ldots + ydq - du,\\
0 &= xd^2p + \ldots + yd^2q - d^2u,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= xd^{m-1}p + \ldots + yd^{m-1}q - d^{m-1}u;
\end{aligned}$$

et en suivant la même marche que précédemment, on exprimerait les $m+1$ quantités $x, \ldots, y$, z et s sous forme finie, à l'aide de m fonctions de la variable indépendante, dont $m-1$ pourraient être considérées comme arbitraires.

La même transformation s'appliquerait encore à l'équation plus générale

$$dx^n + \ldots + dy^n + dz^n = ds^n,$$

où n est un nombre quelconque.

II.

Revenons à la question proposée, et occupons-nous du choix de la variable indépendante.

q et p; étant deux fonctions d'une même variable indépendante, peuvent être considérées comme les coordonnées rectilignes d'une courbe plane arbitraire; l'équation générale des tangentes de cette courbe sera

$$q\cos\theta - p\sin\theta + \varphi(\theta) = 0,$$

θ étant un paramètre variable et φ une fonction arbitraire. En outre, comme toute courbe est l'enveloppe de ses tangentes, on pourra poser

$$(10) \qquad \begin{cases} q\cos\theta - p\sin\theta + \varphi = 0, \\ q\sin\theta + p\cos\theta - \varphi' = 0, \end{cases}$$

et considérer ces équations comme appartenant à la courbe : la seconde de ces équations est la dérivée de la première par rapport au paramètre θ que nous prendrons pour variable indépendante; enfin, nous mettons simplement φ au lieu de $\varphi(\theta)$, et nous dénotons les dérivées à la manière de Lagrange.

Des équations (10) on déduit les valeurs suivantes de p et q, qui contiennent une fonction arbitraire φ et sont, d'après ce qui précède, les plus générales qu'on puisse imaginer,

$$(11) \qquad \begin{cases} q = \varphi'\sin\theta - \varphi\cos\theta, \\ p = \varphi'\cos\theta + \varphi\sin\theta; \end{cases}$$

on déduit de là

$$(12) \qquad \begin{cases} dq = (\varphi'' + \varphi)\sin\theta\, d\theta, \\ dp = (\varphi'' + \varphi)\cos\theta\, d\theta, \\ pdq - q\,dp = (\varphi'' + \varphi)\,\varphi\, d\theta; \end{cases}$$

d'où

$$(13) \qquad \sqrt{dq^2 + dp^2 + (pdq - q\,dp)^2} = (\varphi'' + \varphi)\sqrt{1 + \varphi^2}\, d\theta.$$

On a encore

$$(14) \qquad \begin{cases} d^2q = [(\varphi''' + \varphi')\sin\theta + (\varphi'' + \varphi)\cos\theta]\, d\theta^2, \\ d^2p = [(\varphi''' + \varphi')\cos\theta - (\varphi'' + \varphi)\sin\theta]\, d\theta^2, \end{cases}$$

d'où

$$dq\,d^2p - dp\,d^2q = -(\varphi'' + \varphi)^2\,d\theta^3. \tag{15}$$

Nous avons encore besoin des différentielles du troisième ordre; on trouve

$$\left\{\begin{aligned} d^3q &= [(\varphi^{\text{IV}} - \varphi)\sin\theta + 2(\varphi''' + \varphi')\cos\theta]\,d\theta^3,\\ d^3p &= [(\varphi^{\text{IV}} - \varphi)\cos\theta - 2(\varphi''' + \varphi')\sin\theta]\,d\theta^3,\end{aligned}\right. \tag{16}$$

et l'on déduit de l'équation (15), par la différentiation,

$$dq\,d^3p - dp\,d^3q = -2(\varphi'' + \varphi)(\varphi''' + \varphi')\,d\theta^4; \tag{17}$$

enfin, des équations (14) et (16) on tire

$$\left\{\begin{aligned} &d^2q\,d^3p - d^2p\,d^3q\\ &= [(\varphi'' + \varphi)(\varphi^{\text{IV}} + \varphi'') - 2(\varphi''' + \varphi')^2 - (\varphi'' + \varphi)^2]\,d\theta^5.\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Cela posé, en vertu des équations (13), (15), (17) et (18), les valeurs de A, B, C deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= -\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi''+\varphi},\\ \mathrm{B} &= \frac{2(\varphi'''+\varphi')\sqrt{1+\varphi^2}}{(\varphi''+\varphi)^2},\\ \mathrm{C} &= \left[\frac{(\varphi^{\text{IV}}+\varphi'')}{(\varphi''+\varphi)^2} - 2\frac{(\varphi'''+\varphi')^2}{(\varphi''+\varphi)^3} - \frac{1}{\varphi''+\varphi}\right]\sqrt{1+\varphi^2}.\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Différentiant la première des équations (19) et retranchant ensuite la seconde, on a

$$\frac{d\mathrm{A}}{d\theta} - \mathrm{B} = -\frac{(\varphi'''+\varphi')\sqrt{1+\varphi^2}}{(\varphi''+\varphi)^2} - \frac{\varphi\varphi'}{(\varphi''+\varphi)\sqrt{1+\varphi^2}}. \tag{20}$$

Différentiant l'équation (20) et ajoutant au résultat la troisième des équations (19), on a

$$\frac{d^2\mathrm{A}}{d\theta^2} - \frac{d\mathrm{B}}{d\theta} + \mathrm{C} = -\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} - \frac{1+\varphi^2+\varphi'^2}{(\varphi''+\varphi)(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{21}$$

et, en faisant, pour abréger,

$$(22) \qquad -\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} - \frac{1+\varphi^2+\varphi'^2}{(\varphi''+\varphi)(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{P},$$

on aura

$$(23) \qquad u = \frac{\psi'(\theta)}{\mathrm{P}'},$$

et, par suite,

$$(24) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{\psi''(\theta)}{\mathrm{P}'} - \dfrac{\mathrm{P}''\psi'(\theta)}{\mathrm{P}'^2}, \\[2ex] \dfrac{d^2u}{d\theta^2} = \dfrac{\psi'''(\theta)}{\mathrm{P}'} - \dfrac{2\,\mathrm{P}''\psi''(\theta)}{\mathrm{P}'^2} + \dfrac{(2\,\mathrm{P}''^2 - \mathrm{P}'\mathrm{P}''')\,\psi'(\theta)}{\mathrm{P}'^3}. \end{cases}$$

D'après cela, on aura les valeurs des quantités x, y, z et s à l'aide des formules (3) et (9), en éliminant les quantités p, q, u de leurs expressions. Cela se fera sans difficulté en se servant des formules que nous avons données; mais nous nous dispenserons d'écrire ici ces valeurs à cause de leur extrême complication.

III.

Nous venons de trouver la solution générale de l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

qui renferme, comme on a vu, deux fonctions arbitraires φ et ψ; mais il est très-remarquable que cette même équation admette encore une autre solution qui ne renferme qu'une seule fonction arbitraire, et qui ne saurait être comprise dans la solution générale que nous avons trouvée. J'appellerai, en conséquence, cette seconde solution la solution singulière de l'équation proposée. Cette solution singulière est relative au cas où la quantité que nous avons appelée P se réduirait à une constante; les équations (23) et (24) seront, en effet, illusoires: la fonction $\varphi(\theta)$ sera alors déterminée par l'équation différentielle

$$\mathrm{P} = \text{constante},$$

c'est-à-dire

$$(25)\qquad \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{1+\varphi^2+\varphi'^2}{(\varphi''+\varphi)(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{constante} = m,$$

et la fonction u sera absolument arbitraire. Les équations (3) continueront de donner les valeurs de x, y et z, et la valeur de s le sera par l'équation (7), qui se réduit à

$$s = \mathrm{A}\frac{d^2u}{d\theta^2} - \left(\frac{d\mathrm{A}}{d\theta} - \mathrm{B}\right)\frac{du}{d\theta} + mu.$$

On arriverait à des formules simples dans le cas de $m = 0$. L'équation (25) se réduit à

$$\varphi + \frac{1+\varphi^2+\varphi'^2}{(\varphi''+\varphi)(1+\varphi^2)} = 0,$$

et a pour intégrale

$$\varphi = \sqrt{n^2\cos^2(\theta-\theta_0) - 1},$$

n et θ_0 étant les deux constantes arbitraires. Je ne crois pas, toutefois, devoir insister sur ce cas particulier.

NOTE

SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

PAR M. J.-A. SERRET.

On sait, d'après le beau théorème de M. Gauss, que si l'on fait éprouver à une surface une déformation quelconque, le produit des rayons de courbure principaux conserve en chaque point sa valeur; d'où il suit en particulier que les surfaces développables sur la sphère jouissent de la propriété, que le produit de leurs rayons de courbure principaux a en chaque point la même valeur.

Les travaux récents de MM. Liouville et Bertrand sur le théorème de M. Gauss ont attiré mon attention sur ce sujet, et j'ai entrepris d'étudier l'équation aux dérivées partielles des surfaces dont les rayons de courbure principaux ont un produit constant. Jusqu'ici mes recherches ne m'ont conduit à aucun résultat satisfaisant au point de vue de la géométrie; mais j'ai trouvé une solution de l'équation aux dérivées partielles dont je viens de parler, solution qui contient une fonction arbitraire et qui ne représente que des surfaces imaginaires. Cette solution est assez remarquable en ce sens qu'elle se présente comme une sorte de *solution singulière* de l'équation aux dérivées partielles; je pense faire une chose qui sera agréable aux géomètres en publiant ici ce résultat.

Conformément à l'usage adopté, nous désignerons par x, y, z les coordonnées rectangulaires de la surface, par p et q les dérivées du premier ordre $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, par r, s, t celles du second $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$; l'équation que nous allons considérer sera alors, comme chacun sait,

$$a^2(rt - s^2) = -(1 + p^2 + q^2)^2, \tag{1}$$

a désignant une constante réelle ou imaginaire.

Nous emploierons la transformation connue de Legendre et nous poserons

$$(2) \qquad u = px + qy - z;$$

prenant alors p et q pour variables indépendantes, on aura

$$(3) \qquad x = \frac{du}{dp}, \quad y = \frac{du}{dq}$$

et

$$(4) \qquad \frac{d^2u}{dp^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2u}{dp\,dq} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2u}{dq^2} = \frac{r}{rt - s^2},$$

d'où

$$(5) \qquad \frac{d^2u}{dp^2}\cdot\frac{d^2u}{dq^2} - \left(\frac{d^2u}{dp\,dq}\right)^2 = \frac{1}{rt - s^2};$$

les équations (2) et (3) feront connaître z, y et x en fonction de p et q, dès que la valeur de u sera connue. Enfin, à cause de l'équation (5), l'équation proposée (1) devient

$$\frac{d^2u}{dp^2}\cdot\frac{d^2u}{dq^2} - \left(\frac{d^2u}{dp\,dq}\right)^2 = -\frac{a^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

ou

$$\frac{d^2u}{dp^2}\cdot\frac{d^2u}{dq^2} = \left(\frac{d^2u}{dp\,dq} - \frac{a}{1+p^2+q^2}\right)\left(\frac{d^2u}{dp\,dq} + \frac{a}{1+p^2+q^2}\right),$$

et résultera de l'élimination de la quantité λ entre les deux suivantes :

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda\frac{d^2u}{dp^2} - \frac{d^2u}{dp\,dq} + \frac{a}{1+p^2+q^2} = 0,\\ &\lambda\frac{d^2u}{dp\,dq} - \frac{d^2u}{dq^2} + \frac{a\lambda}{1+p^2+q^2} = 0.\end{aligned}\right.$$

Différentions ces équations, la première par rapport q, et la seconde par rapport à p; on aura

$$\lambda\frac{d^3u}{dp^2dq} - \frac{d^3u}{dp\,dq^2} + \frac{d\lambda}{dq}\frac{d^2u}{dp^2} - \frac{2aq}{(1+p^2+q^2)^2} = 0,$$

$$\lambda\frac{d^3u}{dp^2dq} - \frac{d^3u}{dp\,dq^2} + \frac{d\lambda}{dp}\frac{d^2u}{dp\,dq} + \frac{a\dfrac{d\lambda}{dp}}{1+p^2+q^2} - \frac{2ap\lambda}{(1+p^2+q^2)^2} = 0,$$

et, en retranchant,

$$(7)\qquad \frac{d\lambda}{dq}\frac{d^2u}{dp^2}-\frac{d\lambda}{dp}\frac{d^2u}{dp\,dq}-\frac{a\frac{d\lambda}{dp}}{1+p^2+q^2}-\frac{2a(q-p\lambda)}{(1+p^2+q^2)^2}=0.$$

Des équations (6) et (7) on peut tirer les valeurs des trois dérivées $\frac{d^2u}{dp^2}$, $\frac{d^2u}{dp\,dq}$, $\frac{d^2u}{dq^2}$; savoir,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{d\lambda}{dq}-\lambda\frac{d\lambda}{dp}\right)\frac{d^2u}{dp^2}=\frac{2a\frac{d\lambda}{dp}}{1+p^2+q^2}+\frac{2a(q-p\lambda)}{(1+p^2+q^2)^2},\\
&\left(\frac{d\lambda}{dq}-\lambda\frac{d\lambda}{dp}\right)\frac{d^2u}{dp\,dq}=\frac{a\left(\frac{d\lambda}{dq}+\lambda\frac{d\lambda}{dp}\right)}{1+p^2+q^2}+\frac{2a\lambda(q-p\lambda)}{(1+p^2+q^2)^2},\\
&\left(\frac{d\lambda}{dq}-\lambda\frac{d\lambda}{dp}\right)\frac{d^2u}{dq^2}=\frac{2a\lambda\frac{d\lambda}{dq}}{1+p^2+q^2}+\frac{2a\lambda^2(q-p\lambda)}{(1+p^2+q^2)^2}.
\end{aligned}\right.$$

On voit que si λ était connu, u le serait aussi, puisqu'on connaîtrait sa différentielle seconde d^2u. La quantité λ dépend d'une équation du deuxième ordre que nous nous dispenserons de former, et qu'on obtiendrait aisément à l'aide des équations (8); il suffirait, par exemple, de tirer des deux premières les valeurs de $\frac{d^2u}{dp^2}$ et $\frac{d^2u}{dp\,dq}$, et d'égaler ensemble les valeurs de leurs dérivées $\frac{d}{dq}\frac{d^2u}{dp^2}$ et $\frac{d}{dp}\frac{d^2u}{dp\,dq}$.

Remarquons que les équations (8) deviendront illusoires, pour toute valeur de λ qui satisferait à l'équation

$$(9)\qquad \frac{d\lambda}{dq}-\lambda\frac{d\lambda}{dp}=0.$$

Or je dis qu'une pareille valeur de λ peut correspondre à une solution de notre équation aux dérivées partielles. Ceci ne peut arriver à moins que les seconds membres des équations (8) ne soient nuls, c'est-à-dire à moins que l'on n'ait

$$(10)\qquad \frac{d\lambda}{dp}+\frac{q-\lambda p}{1+p^2+q^2}=0.$$

Il est très-remarquable qu'on puisse satisfaire aux équations (9)

et (10) par une même valeur de λ, d'où il suit que les équations (8) seront alors vérifiées d'elles-mêmes; en effet, l'intégrale générale de l'équation (9) est

$$p + \lambda q = \varphi(\lambda),$$

$\varphi(\lambda)$ désignant une fonction arbitraire. On en déduit

$$\frac{d\lambda}{dp} = \frac{1}{\frac{d\varphi}{d\lambda} - q},$$

et, par suite, l'équation (10) devient, en remplaçant p et $\frac{d\lambda}{dp}$ par leurs valeurs,

$$\left(1 + \varphi^2 - \lambda\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda}\right) + q\left[(1+\lambda^2)\frac{d\varphi}{d\lambda} - \lambda\varphi\right] = 0.$$

Pour que cette équation ait lieu quel que soit q, il faut que l'on ait à la fois

$$(11) \qquad 1 + \varphi^2 - \lambda\varphi\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0 \quad \text{et} \quad (1+\lambda^2)\frac{d\varphi}{d\lambda} - \lambda\varphi = 0.$$

En éliminant $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ des équations (11), on a

$$1 + \lambda^2 + \varphi^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \varphi(\lambda) = \sqrt{-1-\lambda^2},$$

et l'on s'assure aisément que cette valeur de $\varphi(\lambda)$ satisfait à chacune des équations (11).

Si donc on pose

$$(12) \qquad p + \lambda q = \sqrt{-1-\lambda^2},$$

les équations (8) se trouveront vérifiées d'elles-mêmes, et l'on pourra dès lors intégrer les équations (6) qui sont linéaires et du premier ordre chacune, si l'on y considère $\frac{du}{dp}$ dans la première, et $\frac{du}{dq}$ dans la seconde, comme la variable principale.

Examinons d'abord la première des équations (6), et considérons $\frac{du}{dp} = x$ comme fonction des quantités q et λ; p est alors une fonction

de q et de λ définie par l'équation (12): on a

$$\frac{d^2u}{dp^2} = \frac{dx}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dp},$$
$$\frac{d^2u}{dp\,dq} = \frac{dx}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dq} + \frac{dx}{dq}.$$

Par suite, la première des équations (6) donnera, en ayant égard à l'équation (9),

$$\frac{dx}{dq} = \frac{a}{1+p^2+q^2} = \frac{-a}{(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})^2},$$

d'où en intégrant, et désignant par ψ une fonction arbitraire,

$$(13) \qquad x = \frac{a}{\sqrt{-1-\lambda^2}(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})} + \psi(\lambda).$$

On considérera pareillement, dans la deuxième des équations (6), $\frac{du}{dq} = y$ comme fonction des quantités q et λ; on aura

$$\frac{d^2u}{dp\,dq} = \frac{dy}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dp},$$
$$\frac{d^2u}{dq^2} = \frac{dy}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dq} + \frac{dy}{dq}.$$

La seconde des équations (6) devient alors

$$\frac{dy}{dq} = \frac{a\lambda}{1+p^2+q^2} = \frac{-a\lambda}{(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})^2},$$

d'où, en désignant par φ une fonction arbitraire,

$$(14) \qquad y = \frac{a\lambda}{\sqrt{-1-\lambda^2}(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})} + \varphi(\lambda).$$

Les fonctions ψ et φ ne sont pas toutes deux arbitraires et dépendent, comme on va le voir, l'une de l'autre, à cause que x et y doivent être les dérivées partielles d'une même fonction de p et q.

On a

$$du = x\,dp + y\,dq,$$

et, à cause de l'équation (12),

$$dp = -\lambda\,dq - \frac{\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2}}{\sqrt{-1-\lambda^2}}\,d\lambda,$$

d'où

$$du = (y - \lambda x)\,dq - \frac{\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2}}{\sqrt{-1-\lambda^2}}\,x\,d\lambda,$$

et, en mettant à la place de x et y leurs valeurs tirées des équations (13) et (14),

$$\begin{aligned} du &= [\varphi(\lambda) - \lambda\psi(\lambda)]\,dq + \frac{a\,d\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2}}{\sqrt{-1-\lambda^2}}\,\psi(\lambda)\,d\lambda \\ &= \frac{a\,d\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda\psi(\lambda)}{\sqrt{-1-\lambda^2}}\,d\lambda - \{q\psi(\lambda)\,d\lambda + [\lambda\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)]\,dq\}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de cette valeur de du sont des différentielles exactes, et pour que le troisième le soit, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lambda\psi'(\lambda) = \varphi'(\lambda),$$

φ' et ψ' désignant les dérivées respectives de φ et ψ; si donc $F(\lambda)$ désigne une fonction arbitraire, on pourra poser

$$\psi(\lambda) = F'(\lambda), \quad \varphi(\lambda) = \lambda F'(\lambda) - F(\lambda),$$

et l'on aura

$$du = \frac{a\,d\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda F'(\lambda)}{\sqrt{-1-\lambda^2}} - [qF'(\lambda)\,d\lambda + F(\lambda)\,dq],$$

et, en intégrant,

$$u = -qF(\lambda) + a \operatorname{arc\,tang} \lambda - \int \frac{\lambda F'(\lambda)}{\sqrt{-1-\lambda^2}}\,d\lambda.$$

Enfin, on déterminera z par l'équation

$$z = px + qy - u,$$

et, en résumé, on aura les valeurs suivantes de x, y, z:

$$(15)\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{-1-\lambda^2}\,(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})} + F'(\lambda), \\ y &= \frac{a\lambda}{\sqrt{-1-\lambda^2}\,(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2})} + \lambda F'(\lambda) - F(\lambda), \\ z &= \frac{a}{\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2}} - a \operatorname{arc\,tang}\lambda + \sqrt{-1-\lambda^2}\,F'(\lambda) + \int \frac{\lambda F'(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{-1-\lambda^2}}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations (15), qui renferment une fonction arbitraire $F(\lambda)$, constituent une solution de l'équation aux différentielles partielles proposée. Elles appartiennent à une surface réglée imaginaire, car on obtient, par l'élimination de q, les deux suivantes :

$$(16)\qquad \begin{cases} y = \lambda x - F(\lambda), \\ z = x\sqrt{-1-\lambda^2} - a \operatorname{arc\,tang} \lambda + \int \dfrac{\lambda F'(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{-1-\lambda^2}}, \end{cases}$$

qui sont celles d'une ligne droite.

On peut débarrasser les formules (15) ou (16) du signe d'intégration. Si l'on pose

$$F(\lambda) = (1+\lambda^2)\sqrt{-1-\lambda^2} f'(\lambda) - a\sqrt{-1-\lambda^2},$$

$f'(\lambda)$ désignant la dérivée d'une fonction arbitraire $f(\lambda)$, les équations (16) deviennent

$$(17)\qquad \begin{cases} y = \lambda x + a\sqrt{-1-\lambda^2} - (1+\lambda^2)\sqrt{-1-\lambda^2} f'(\lambda), \\ z = x\sqrt{-1-\lambda^2} - a\lambda + \lambda(1+\lambda^2) f'(\lambda) - f(\lambda). \end{cases}$$

Si l'on change x et y en $x\sqrt{-1}$ et $y\sqrt{-1}$, les équations (17) deviennent

$$(18)\qquad \begin{cases} y = \lambda x + a\sqrt{1+\lambda^2} - (1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}} f'(\lambda), \\ z = -x\sqrt{1+\lambda^2} - a\lambda + \lambda(1+\lambda^2) f'(\lambda) - f(\lambda), \end{cases}$$

et les équations (18) constituent une solution réelle de l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$a^2(rt - s^2) = -(1 - p^2 - q^2)^2.$$

La surface imaginaire représentée par le système des équations (15) ou (16) ou (17) jouit donc de la propriété que le produit de ses deux rayons de courbure principaux est constant en chaque point: mais, ce qui me paraît très-remarquable, c'est que ces deux rayons de courbure soient eux-mêmes constants en chaque point et égaux entre eux; autrement notre surface a, comme la sphère, la propriété que tous ses points sont des ombilics.

En effet, en différentiant par rapport à x et y l'équation

$$p + \lambda q = \sqrt{-1-\lambda^2},$$

et ayant égard aux équations (15) et (16), on a

$$r + \lambda s = \frac{\lambda\left(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2}\right)^2}{a},$$

$$s + \lambda t = \frac{-\left(\lambda + q\sqrt{-1-\lambda^2}\right)^2}{a},$$

d'où

$$(19) \qquad t\lambda^2 + 2s\lambda + r = 0;$$

d'ailleurs l'équation entre p, q et λ peut se mettre sous la forme

$$(20) \qquad (1+q^2)\lambda^2 + 2pq\lambda + (1+p^2) = 0.$$

Éliminant λ entre les équations (19) et (20), on trouve

$$[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 - 4(1+p^2+q^2)(rt-s^2) = 0,$$

ou, en désignant par R et R′ les deux rayons de courbure,

$$(R - R')^2 = 0.$$

Il est assez curieux que cette surface imaginaire, qu'on pourrait considérer comme connue, puisque Monge a donné l'intégrale complète de l'équation

$$R = R',$$

se soit présentée comme une véritable solution singulière de l'équation

$$RR' = \text{constante}.$$

Sur le mouvement d'un point matériel attiré en raison inverse du carré des distances par deux centres mobiles;

PAR M. A.-H. DESBOVES.

(Thèse de Mécanique présentée à la Faculté des Sciences de Paris, le 3 avril 1848.)

I.

Le problème de la détermination du mouvement d'un point matériel attiré en raison inverse du carré des distances par deux centres fixes s'est naturellement présenté aux géomètres successeurs de Newton. Euler et Lagrange ont montré, par des méthodes différentes, comment ce problème pouvait se ramener aux quadratures; mais leurs méthodes, remarquables par d'ingénieux artifices de calcul, n'avaient pas un caractère de généralité assez grand pour leur faire découvrir une classe étendue de problèmes susceptibles d'être ramenés aux quadratures, comme le problème particulier qu'ils avaient résolu. C'est dans ces derniers temps que M. Liouville, prenant son point de départ dans les travaux de Lagrange et de M. Jacobi, a montré par deux méthodes différentes, que toutes les fois que le principe des forces vives a lieu dans le mouvement d'un point matériel, et que la fonction des forces a une certaine forme générale qu'il fait connaître, le problème est ramené aux quadratures. Ainsi, à la simple inspection de la fonction des forces exprimée dans un système de coordonnées que donne la méthode elle-même, on voit immédiatement qu'il est possible de résoudre le problème des centres fixes. Mais, ce qui est surtout remarquable, on voit de la même manière, et avec la même facilité, qu'on peut ramener aux quadratures un problème nouveau d'un sens mécanique suffisamment clair, dont M. Liouville a le pre-

mier donné l'énoncé, ainsi qu'il suit : Trouver le mouvement d'un point matériel attiré suivant la loi de l'inverse du carré des distances par deux centres mobiles sur une circonférence de cercle et toujours placés aux extrémités d'un même diamètre. On suppose d'ailleurs que le mouvement des deux centres d'action soit tel, que le point attiré se trouve toujours dans le plan déterminé par l'axe du cercle et le diamètre mobile. On peut aussi, sans rendre plus difficile la solution du problème, compliquer un peu l'énoncé en ajoutant une troisième force proportionnelle à la distance, émanant du centre même du cercle. L'analogie est alors tout à fait complète entre l'énoncé du nouveau problème et l'énoncé du problème des centres fixes, tel que Lagrange l'a résolu.

Je me propose, dans cette Thèse, de développer la solution du problème des centres mobiles, en faisant principalement usage de la méthode fondée sur la connaissance d'une solution complète d'une certaine équation aux différences partielles, du premier ordre et non linéaire. M. Liouville a fait connaître une solution complète de cette équation dans un cas très-général, puis il en a déduit, comme cas particulier, une formule beaucoup plus simple qui lui a donné immédiatement l'énoncé et la solution de son nouveau problème [*]. J'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt d'arriver directement à la formule simple qui suffit à la résolution du problème des centres mobiles.

Il m'a aussi paru curieux de chercher si les anciennes méthodes d'Euler et de Lagrange pour la solution du problème des deux centres fixes, pouvaient, avec quelques modifications, s'appliquer au problème des centres mobiles qui paraît plus compliqué. J'ai trouvé et je ferai voir ici que les deux méthodes s'appliquent de la manière la plus heureuse au problème de M. Liouville.

II.

M. Jacobi a démontré que toutes les fois que le principe des forces vives avait lieu, le problème de l'intégration des équations différentielles ordinaires de la mécanique appliquées au mouvement d'un ou de

[*] *Journal de Mathématiques*, tome XII, page 440.

plusieurs points libres, ou soumis à des liaisons quelconques, pouvait se ramener à la détermination d'une solution complète d'une équation aux différences partielles du premier ordre. En nous bornant au cas du mouvement d'un seul point libre, si l'équation des forces vives est

$$\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dt^2} = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}),$$

nous savons, d'après le théorème de M. Jacobi, que pour intégrer les trois équations du mouvement,

$$(1) \qquad \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d\mathrm{U}}{dx_1}, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d\mathrm{U}}{dx_2}, \quad \frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{d\mathrm{U}}{dx_3},$$

il suffit de trouver une fonction Θ de x_1, x_2, x_3 contenant trois constantes arbitraires différentes de celle qu'on peut toujours introduire dans Θ par simple addition, et satisfaisant identiquement à l'équation aux différences partielles,

$$(2) \qquad \left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_3}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}).$$

Cette fonction étant connue, et A, B, C étant les constantes de la fonction, les intégrales cherchées du mouvement seront

$$(3) \qquad \frac{d\Theta}{d\mathrm{A}} = \mathrm{A}', \quad \frac{d\Theta}{d\mathrm{B}} = \mathrm{B}, \quad \frac{d\Theta}{d\mathrm{C}} = \mathrm{C}',$$

A′, B′, C′ étant de nouvelles constantes arbitraires qui, avec A, B, C, complètent le nombre de constantes arbitraires que doit donner l'intégration des équations proposées. Toute la difficulté du problème est donc ramenée à déterminer une solution complète de l'équation (2).

Il est un cas où cette solution complète se détermine directement et pour ainsi dire à la simple inspection de l'équation (2); c'est celui où U est la somme de trois quantités Q_1, Q_2, Q_3 respectivement fonctions de x_1, x_2, x_3.

En effet, pour satisfaire à la double condition que l'équation (2) soit vérifiée identiquement, quelle que soit la constante C, et que la fonction contienne les trois constantes arbitraires, il suffira évidem-

ment de poser

$$(4)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 = AR_1 + BS_1 + 2CT_1 + 2Q_1 = \varpi(x_1), \\ \left(\dfrac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 = AR_2 + BS_2 + 2CT_2 + 2Q_2 = \psi(x_2), \\ \left(\dfrac{d\Theta}{dx_3}\right)^2 = AR_3 + BS_3 + 2CT_3 + 2Q_3 = \chi(x_3); \end{cases}$$

R_1, R_2, R_3, etc., étant des fonctions d'une seule variable x_1, x_2 ou x_3, liées entre elles par les équations

$$(5)\quad R_1 + R_2 + R_3 = 0, \quad S_1 + S_2 + S_3 = 0, \quad T_1 + T_2 + T_3 = 1,$$

on aura alors

$$(6)\qquad \Theta = \int\sqrt{\varpi(x_1)}\,dx_1 + \int\sqrt{\psi(x_2)}\,dx_2 + \int\sqrt{\chi(x_3)}\,dx_3.$$

Le cas très-simple que nous venons de considérer n'a certainement rien de bien intéressant en lui-même, puisque dans le cas où la fonction des forces satisfait à la condition que nous avons indiquée, les variables sont séparées dans chacune des équations du mouvement, et que chacune d'elles peut s'intégrer séparément. Mais concevons maintenant que les variables x_1, x_2, x_3 soient remplacées par d'autres variables ρ_1, ρ_2, ρ_3, telles qu'après la substitution, l'équation aux différences partielles ait une forme analogue à celle qu'elle avait d'abord, c'est-à-dire en désignant par λ, λ', λ'' certaines fonctions des nouvelles variables; supposons qu'on ait

$$(7)\qquad \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda''}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_3}\right)^2 + 2(U + C).$$

Si ρ_1, ρ_2, ρ_3 formaient un nouveau système quelconque de coordonnées, l'équation (7) contiendrait les doubles produits $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_2}$, etc. Mais nous supposerons que les nouvelles variables soient choisies de manière que, dans l'équation (7), les coefficients de ces doubles produits soient nuls.

Il est évident qu'on peut prendre maintenant pour U la fonction

beaucoup plus compliquée que tout à l'heure,

$$(8)\qquad U=\frac{Q_1}{\lambda}+\frac{Q_2}{\lambda'}+\frac{Q_3}{\lambda''},$$

et remplacer les équations (4), (5) et (6) par les suivantes, dans lesquelles, ainsi que dans la précédente, les signes de fonction se rapportent aux nouvelles variables

$$(9)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 = AR_1 + BS_1 + 2CT_1 + 2Q_1 = \varpi(\rho_1), \\ \left(\dfrac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 = AR_2 + BS_2 + 2CT_2 + 2Q_2 = \psi(\rho_2), \\ \left(\dfrac{d\Theta}{d\rho_3}\right)^2 = AR_3 + BS_3 + 2CT_3 + 2Q_3 = \chi(\rho_3), \end{cases}$$

$$(10)\qquad \frac{R_1}{\lambda}+\frac{R_2}{\lambda'}+\frac{R_3}{\lambda''}=0,\quad \frac{S_1}{\lambda}+\frac{S_2}{\lambda'}+\frac{S_3}{\lambda''}=0,\quad \frac{T_1}{\lambda}+\frac{T_2}{\lambda'}+\frac{T_3}{\lambda''}=1,$$

$$(11)\qquad \Theta=\int\sqrt{\varpi(\rho_1)}\,d\rho_1+\int\sqrt{\psi(\rho_2)}\,d\rho_2+\int\sqrt{\chi(\rho_3)}\,d\rho_3.$$

Nous avons maintenant deux espèces de conditions à remplir : 1° choisir les nouvelles variables, de manière que, dans l'équation (7), il manque les doubles produits de la forme $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_2}$; 2° déterminer des fonctions R_1, S_1, etc., satisfaisant aux équations (10). Voyons d'abord comment la première condition sera remplie.

Si l'on remplace, dans l'équation (2), $\frac{d\Theta}{dx_1}$, $\frac{d\Theta}{dx_2}$, $\frac{d\Theta}{dx_3}$ par leurs valeurs respectives $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_1}+\frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx_1}+\frac{d\Theta}{d\rho_3}\frac{d\rho_3}{dx_1}$, $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_2}+\cdots$, $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_3}+\cdots$, et qu'on égale à zéro les coefficients des doubles produits de la forme $\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_2}$, on tombe sur les équations :

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\rho_1}{dx_1}\dfrac{d\rho_2}{dx_1}+\dfrac{d\rho_1}{dx_2}\dfrac{d\rho_2}{dx_2}+\dfrac{d\rho_1}{dx_3}\dfrac{d\rho_2}{dx_3}=0, \\ \dfrac{d\rho_1}{dx_1}\dfrac{d\rho_3}{dx_1}+\dfrac{d\rho_1}{dx_2}\dfrac{d\rho_3}{dx_2}+\dfrac{d\rho_1}{dx_3}\dfrac{d\rho_3}{dx_3}=0, \\ \dfrac{d\rho_2}{dx_1}\dfrac{d\rho_3}{dx_1}+\dfrac{d\rho_2}{dx_2}\dfrac{d\rho_3}{dx_2}+\dfrac{d\rho_2}{dx_3}\dfrac{d\rho_3}{dx_3}=0. \end{cases}$$

Or, si l'on considère les équations

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \rho_1, \quad f_2 = (x_1, x_2, x_3) = \rho_2, \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = \rho_3,$$

qui lient les nouvelles variables aux anciennes, comme étant les équations de surfaces variables dans lesquelles x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées d'un point de la surface, ρ_1, ρ_2, ρ_3 des paramètres variables, les équations (12) montrent que les surfaces variables doivent toujours former un système de surfaces orthogonales.

La substitution que nous venons d'indiquer montre en même temps que l'on a

$$(13)\quad \lambda = \frac{1}{\frac{d\rho_1^2}{dx_1^2}+\frac{d\rho_1^2}{dx_2^2}+\frac{d\rho_1^2}{dx_3^2}}, \quad \lambda' = \frac{1}{\frac{d\rho_2^2}{dx_1^2}+\frac{d\rho_2^2}{dx_2^2}+\frac{d\rho_2^2}{dx_3^2}}, \quad \lambda'' = \frac{1}{\frac{d\rho_3^2}{dx_1^2}+\frac{d\rho_3^2}{dx_2^2}+\frac{d\rho_3^2}{dx_3^2}}.$$

Nous pouvons, d'un autre côté, remarquer que si l'on exprime

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

dans le nouveau système de coordonnées satisfaisant à la condition que nous venons d'énoncer, l'expression de ds^2 sera de la forme $p_1\,d\rho_1^2 + p_2\,d\rho_2^2 + p_3\,d\rho_3^2$, et les quantités λ, λ', λ'' pourront être prises respectivement égales à p_1, p_2, p_3.

En effet, si l'on remplace, dans l'expression de ds^2, dx_1, dx_2, dx_3 par les différentielles totales relatives à ρ_1, ρ_2, ρ_3, dont x_1, x_2, x_3 peuvent être considérées comme des fonctions, on aura

$$(14)\quad p_1 = \frac{dx_1^2}{d\rho_1^2}+\frac{dx_2^2}{d\rho_1^2}+\frac{dx_3^2}{d\rho_1^2}, \quad p_2 = \frac{dx_1^2}{d\rho_2^2}+\frac{dx_2^2}{d\rho_2^2}+\frac{dx_3^2}{d\rho_2^2}, \quad p_3 = \frac{dx_1^2}{d\rho_3^2}+\frac{dx_2^2}{d\rho_3^2}+\frac{dx_3^2}{d\rho_3^2};$$

et, pour que les doubles produits des différentielles $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$ manquent dans l'expression de ds^2, on devra avoir

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\rho_1}\dfrac{dx_1}{d\rho_2} + \dfrac{dx_2}{d\rho_1}\dfrac{dx_2}{d\rho_2} + \dfrac{dx_3}{d\rho_1}\dfrac{dx_3}{d\rho_2} = 0, \\ \dfrac{dx_1}{d\rho_1}\dfrac{dx_1}{d\rho_3} + \dfrac{dx_2}{d\rho_1}\dfrac{dx_2}{d\rho_3} + \dfrac{dx_3}{d\rho_1}\dfrac{dx_3}{d\rho_3} = 0, \\ \dfrac{dx_1}{d\rho_2}\dfrac{dx_1}{d\rho_3} + \dfrac{dx_2}{d\rho_2}\dfrac{dx_2}{d\rho_3} + \dfrac{dx_3}{d\rho_2}\dfrac{dx_3}{d\rho_3} = 0. \end{cases}$$

Mais comme on peut le déduire immédiatement des équations (6) du Mémoire de M. Lamé sur les coordonnées curvilignes [*], les équations (12) et (15) sont une conséquence l'une de l'autre, et les seconds membres des équations (13) et (14) sont égaux : le théorème est donc démontré.

La réciproque étant également vraie, on voit que la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les nouvelles variables pour que l'équation (7) ait lieu, c'est que ds^2 dans le nouveau système de coordonnées ait la forme indiquée plus haut.

Il reste maintenant à déterminer les fonctions R_1, S_1, etc., satisfaisant aux équations (10).

Un cas très-simple où ces fonctions se déterminent immédiatement avec la plus grande facilité, c'est celui où $\lambda = \lambda' = \lambda''$; en effet, les équations de condition sont alors

$$R_1 + R_2 + R_3 = 0, \quad S_1 + S_2 + S_3 = 0, \quad T_1 + T_2 + T_3 = \lambda.$$

On pourra satisfaire à ces équations très-simplement, en prenant, par exemple,

$$R_1 = S_1 = 1, \quad R_2 = S_2 = -1, \quad R_3 = S_3 = T_3 = 0,$$

d'où résultera

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = T_1 + T_2.$$

La valeur de Θ prend alors une forme très-simple, qu'il ne paraît pas utile de rapporter ici. Remarquons seulement que si l'on se bornait au cas de deux variables, c'est-à-dire si $\lambda'' = 0$, on trouverait que le système des coordonnées elliptiques ordinaires dans un plan satisfait aux deux conditions $\lambda = \lambda'$, $\lambda = T_1 + T_2$, et même il y a plus, que ce système, comme l'a fait voir M. Liouville [**], est le seul pour lequel les deux conditions précédentes soient remplies. En formant l'expression de U correspondante à ce cas, on en déduira, en particulier, la solution du problème des deux centres fixes, lorsque la courbe est plane.

---

[*] *Journal de Mathématiques*, tome V, page 320.

[**] *Journal de Mathématiques*, tome XII, page 360.

Il existe un autre cas où il est très-facile de trouver des valeurs de R_1, R_2, R_3, etc., satisfaisant aux équations (10) : c'est lorsqu'on a $\lambda = \lambda'$, λ'' étant différent de λ et λ'.

En effet, si l'on met les équations (10) sous la forme

$$R_1 + R_2 + R_3 \frac{\lambda}{\lambda''} = 0, \quad S_1 + S_2 + S_3 \frac{\lambda}{\lambda''} = 0, \quad T_1 + T_2 + T_3 \frac{\lambda}{\lambda''} = \lambda,$$

on voit que l'on pourra prendre

$$R_3 = 1, \quad S_1 = 1, \quad S_2 = -1, \quad S_3 = 0, \quad T_3 = 0,$$

et l'on aura alors

$$\frac{\lambda}{\lambda''} = -(R_1 + R_2), \quad \lambda = T_1 + T_2.$$

Je vais faire voir tout à l'heure que le cas qui nous occupe en ce moment conduit à la solution du problème des centres mobiles : il est donc essentiel de développer tous les calculs qui s'y rapportent. Il y aurait ici à résoudre une question analytique analogue à celle dont nous parlions tout à l'heure. Cette question serait de déterminer les systèmes de coordonnées pour lesquels les conditions

$$\lambda = \lambda' = T_1 + T_2, \quad \frac{\lambda}{\lambda''} = R_1 + R_2$$

sont remplies; mais elle paraît présenter d'assez grandes difficultés analytiques, et d'ailleurs sa solution ne nous est pas indispensable. En effet, si nous adoptons le système de coordonnées qui se présente le plus naturellement à l'esprit quand on veut résoudre le problème des centres mobiles, c'est-à-dire le système de coordonnées composé de l'angle φ que fait le plan méridien mobile avec un plan fixe passant par l'axe de rotation, et des coordonnées elliptiques ρ et μ rapportées dans le plan mobile aux deux centres mobiles d'attraction, nous trouverons sans difficulté, pour valeur de ds^2,

$$ds^2 = \frac{(\rho^2 - \mu^2)}{\rho^2 - c^2} d\rho^2 + \frac{\rho^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} d\mu^2 + \frac{\rho^2 \mu^2}{c^2} d\varphi^2.$$

On voit que les coefficients de $d\rho^2$, $d\mu^2$, $d\varphi^2$, aux facteurs près $\rho^2 - c^2$,

$c^2 - \mu^2$, satisfont aux conditions exigées; mais ces facteurs, comme nous allons le voir, n'empêchent pas d'appliquer cette méthode.

En effet, si l'on pose

$$\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} = d\alpha, \quad \frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} = d\beta,$$

d'où l'on déduit

$$\rho^2 = \Psi(\alpha), \quad \mu^2 = \mathrm{X}(\beta),$$

l'expression de ds^2 devient

$$ds^2 = [\Psi(\alpha) - \mathrm{X}(\beta)]\, d\alpha^2 + [\Psi(\alpha) - \mathrm{X}(\beta)]\, d\beta^2 + \frac{\Psi(\alpha)\cdot \mathrm{X}(\beta)}{c^2}\, d\varphi^2;$$

et l'on voit que, dans le nouveau système de coordonnées α, β, φ, les coefficients de $d\alpha^2$, $d\beta^2$, $d\gamma^2$ satisfont bien aux conditions voulues. Maintenant, pour calculer l'expression de Θ, il suffira de remplacer dans les équations (9) les variables ρ_1, ρ_2, ρ_3 ou leurs équivalentes ρ, μ, φ par α, β, φ, de sorte que R_1, S_1, etc., représentent des fonctions d'une seule variable α, β ou φ; mais si l'on veut que R_1, S_1, etc., restent des fonctions de ρ, μ, φ dans l'expression de Θ, on pourra supposer que l'on remette dans ces fonctions, pour α, β, leurs valeurs en ρ et μ : ce qui revient évidemment à supposer que, dans les équations (9), (10) et (11), R_1, S_1, etc., restent des fonctions de ρ, μ et φ. Si maintenant on remplace dans les équations (9), modifiées comme il vient d'être dit, $\frac{d\theta}{d\alpha}$, $\frac{d\theta}{d\beta}$ par leurs valeurs $\frac{d\Theta}{d\rho}\sqrt{\rho^2 - c^2}$, $\frac{d\Theta}{d\mu}\sqrt{c^2 - \mu^2}$, on trouvera

$$\Theta = \int \frac{\sqrt{\varpi(\rho)}}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}\, d\rho + \int \frac{\sqrt{\psi(\mu)}}{\sqrt{c^2 - \mu^2}}\, d\mu + \int \chi(\varphi)\, d\varphi.$$

Quant à la valeur de U, si l'on représente les fonctions Q_1, Q_2, Q_3 par $\frac{f(\rho)}{\rho^2}$, $\frac{F(\mu)}{\mu^2}$ et $\Pi(\varphi)$, son expression sera

$$U = \frac{f(\rho)}{\rho^2(\rho^2 - \mu^2)} + \frac{F(\mu)}{\mu^2(\rho^2 - \mu^2)} + \frac{\Pi(\varphi)}{\rho^2\mu^2}.$$

Mettons maintenant dans $\varpi(\rho)$, $\psi(\mu)$ et $\chi(\varphi)$, pour S_1, S_2, S_3, R_3 et T_3 les valeurs données plus haut; pour T_1, T_2, R_1, R_2 leurs

valeurs respectives ρ^2, $-\mu^2$, $\frac{c^2}{\rho^2}$, $-\frac{c^2}{\mu^2}$, déduites des équations

$$\lambda = \lambda' = \rho^2 - \mu^2, \quad \frac{\lambda}{\lambda''} = \frac{c^2}{\mu^2} - \frac{c^2}{\rho^2},$$

et enfin, pour Q_1, Q_2, Q_3 les valeurs indiquées tout à l'heure, nous trouverons sans difficulté

$$\Theta = \int d\rho \sqrt{\frac{Ac^2 + B\rho^2 + 2C\rho^4 + 2f(\rho)}{\rho^2(\rho^2 - c^2)}} + \int d\mu \sqrt{\frac{-Ac^2 - B\mu^2 - 2C\mu^4 + 2F(\mu)}{\rho^2(\rho^2 - c^2)}}$$
$$+ \int d\psi \sqrt{A - 2\Pi(\varphi)}.$$

Cette formule, à un changement insignifiant près, et qu'il eût d'ailleurs été facile d'éviter si cela eût présenté quelque avantage, est précisément celle que M. Liouville a obtenue par une voie indirecte, dans le tome XII du présent Recueil. Appliquons la formule au problème des centres mobiles.

En désignant par r, r', R les distances du point attiré aux deux centres mobiles et au centre fixe, on aura, par un calcul facile,

$$U = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + kR^2 \text{ [*]};$$

mais on a

$$r = \rho + \mu, \quad r' = \rho + \mu,$$

et, en désignant par $2c$ la distance des deux centres mobiles,

$$R^2 = \rho^2 + \mu^2 - c^2.$$

Donc l'expression de U devient

$$U = \frac{g}{\rho + \mu} + \frac{g'}{\rho - \mu} + k(\rho^2 + \mu^2 - c^2),$$

et, par conséquent, on peut supposer, dans l'expression de Θ donnée tout à l'heure,

$$\Pi(\varphi) = 0, \quad F(\mu) = -\mu^2(g\mu - g'\mu + k\mu^4 - kc^2\mu^2),$$
$$f(\rho) = \rho^2(g\rho + g'\rho + k\rho^4 - kc^2\rho^2).$$

[*] Le calcul de U se trouve fait plus loin dans l'exposition de la méthode d'Euler.

Faisant ces substitutions, puis formant, suivant la règle de M. Jacobi, les équations intégrales

$$\frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + C',$$

on trouve sans difficulté, en posant

$$P = (\rho^2 - c^2)[2k\rho^6 - (2kc^2 - C)\rho^4 + 2(g + g')\rho^3 - B\rho^2 + Ac^2],$$
$$Q = (\mu^2 - c^2)[2k\mu^6 - (2kc^2 - C)\mu^4 + 2(g - g')\mu^3 - B\mu^2 + Ac^2],$$

les trois équations suivantes :

$$\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{P}} = \frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{Q}}, \quad \frac{\rho^3\, d\rho}{\sqrt{P}} - \frac{\mu^3\, d\mu}{\sqrt{Q}} = dt, \quad \frac{c^2\, d\rho}{\rho\sqrt{P}} - \frac{c^2\, d\mu}{\mu\sqrt{Q}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{A}}.$$

Comme on le voit, les variables sont séparées, et le problème est ramené aux quadratures. Nous ne ferons pas, pour le moment, d'autres remarques, nous réservant de reprendre la discussion du problème après que nous aurons fait voir, comme nous l'avons annoncé en commençant, que les méthodes d'Euler et de Lagrange, pour la solution du problème des centres fixes, peuvent aussi s'appliquer au problème des centres mobiles.

III.

Méthode d'Euler. — Pour appliquer cette méthode au problème des centres mobiles, je prendrai pour guide le travail de Legendre, qui a simplifié l'exposition d'Euler [*]; j'adopterai aussi autant que possible toutes les notations du *Traité des Fonctions elliptiques*.

Soient ox' l'axe de rotation, $y'oz'$ le plan des centres mobiles, F et G ces deux centres, O le centre fixe, x, y', z' les coordonnées du point attiré M par rapport aux trois axes ox', oy', oz'; x, y les coordonnées du même point rapportées dans le plan méridien à l'axe du cercle et au diamètre mobile; (c, b) $(-c, -b)$ les coordonnées des deux centres mobiles. Posons aussi

$$MF = s, \quad MG = r, \quad FG = 2h, \quad MFO = \omega, \quad 180^\circ - MGO = \varphi;$$

[*] *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 518.

les équations du mouvement seront

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{Ax}{r^3} - \dfrac{Bx}{s^3}, \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} = -\dfrac{A(y'-b)}{r^3} - \dfrac{B(y'+b)}{s^3}, \\ \dfrac{d^2z'}{dt^2} = -\dfrac{A(z'-c)}{r^3} - \dfrac{B(z'-c)}{s^3} \text{ [*]}. \end{cases}$$

En y joignant

$$b^2 + c^2 = h^2, \quad \frac{y'}{z'} = \frac{b}{c},$$

des deux dernières équations, on déduit

$$bdb + cdc = 0,$$

$$y'db + z'dc = \frac{y'}{b}(bdb + cdc) = 0,$$

et, par suite,

$$rdr = (y' - b)\,dy' + (z' - c)\,dz' + xdx,$$
$$sds = (y' + b)\,dy' + (z' + c)\,dz' + xdx,$$

comme si les centres d'action étaient fixes.

On aura donc, à la manière ordinaire, l'équation des forces vives

$$\frac{dx^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2} = \frac{A}{r} + \frac{B}{s} + \frac{C}{2h}.$$

De la seconde et de la troisième des équations (1) on déduit facilement

$$y'dz' - z'dy' = \mathrm{H}dt.,$$

les termes $\frac{A}{r^3}(cy' - bz')$, $\frac{B}{s^3}(cy' - bz')$ étant nuls, en vertu de l'équation

$$\frac{y'}{z'} = \frac{b}{c}.$$

En désignant par φ_1 l'angle du plan méridien avec le plan des x', y',

---

[*] Nous supposons $k = 0$, l'hypothèse de k différent de zéro ne donnant lieu à aucune difficulté.

on peut aussi, comme on sait, mettre l'équation précédente sous la forme

$$y^2 d\varphi_1 = \mathrm{H}\, dt.$$

Nous allons maintenant déduire la troisième intégrale de la considération des aires élémentaires $d\alpha$, $d\mathcal{C}$ engendrées pendant le mouvement, dans le plan méridien par les rayons vecteurs r et s. On aura

$$d^2\alpha = (y-h)\, d^2x - x d^2y,$$
$$d^2\mathcal{C} = (y+h)\, d^2x - x d^2y,$$

D'un autre côté, les valeurs $y' = y \cos \varphi_1$, $z' = y \sin \varphi_1$ donnent

$$d^2y' \cos \varphi_1 + d^2z' \sin \varphi_1 = d^2y - y^2 d\varphi_1^2,$$

et, en subtituant dans cette équation les valeurs de d^2y' et d^2z' données par les équations du mouvement, ainsi que la valeur de $d\varphi_1$ déduite de l'équation

$$y^2 d\varphi_1 = dt,$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\mathrm{H}^2}{y^3} - \frac{\mathrm{A}(y-h)}{r^3} - \frac{\mathrm{B}(y+h)}{s^3}.$$

Mettant maintenant dans les expressions de $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\mathcal{C}}{dt^2}$, pour $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, leurs expressions maintenant connues, on aura

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{\mathrm{H}^2x}{y^3} + \frac{2\mathrm{B}hx}{s^3}, \quad \frac{d^2\mathcal{C}}{dt^2} = -\frac{\mathrm{H}^2x}{y^3} - \frac{2\mathrm{A}hx}{r^3};$$

de ces deux dernières équations on déduit, par un calcul très-simple,

$$\frac{d\alpha\, d^2\mathcal{C} + d\mathcal{C}\, d^2\alpha}{dt^2} = -\ 2\mathrm{A}h \sin\varphi\, d\varphi + 2\mathrm{B}h \sin\omega\, d\omega$$
$$- 8\mathrm{H}^2 \frac{\sin\varphi \sin^3\omega\, d\varphi + \sin\omega \sin^3\varphi\, d\omega}{\sin^3(\varphi+\omega)}.$$

Cette équation ne diffère de celle qui a été trouvée par Euler dans le cas des centres fixes, que par le dernier terme. Or il arrive que ce dernier terme est une différentielle exacte de deux variables, comme le terme correspondant du problème des centres fixes.

En intégrant l'équation précédemment écrite, on aura

$$\frac{d\alpha\, d\mathcal{E}}{dt^2} = 2\,\mathrm{A}h\cos\varphi - 2\,\mathrm{B}h\cos\omega - 4\,\mathrm{H}^2\,\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi+\omega)}$$
$$+ 2\,\mathrm{C}'h = r^2 s^2\,\frac{d\varphi\, d\omega}{dt^2};$$

c'est la troisième intégrale cherchée. On voit facilement qu'on eût trouvé la même équation, au facteur près de $\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi+\omega)}$, si on avait supposé k différent de zéro.

Il faut maintenant procéder à la séparation des variables. Les calculs, à partir de ce moment, sont tout à fait les mêmes que pour le problème des centres fixes. Employons tout de suite, avec Legendre, le changement de variables qui doit conduire à la séparation cherchée, c'est-à-dire posons

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega = pq, \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{p}{q};$$

d'où l'on déduira

$$\sin\varphi = \frac{2pq}{p^2+q^2}, \quad \cos\varphi = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}, \quad \sin\omega = \frac{2pq}{1+p^2q^2}, \quad \cos\omega = \frac{1-p^2q^2}{1+p^2q^2},$$
$$r = \frac{2h}{1-p^2} - \frac{2h}{1+q^2}, \quad s = \frac{2h}{1-p^2} - \frac{2hq^2}{1+q^2}.$$

On aura ensuite facilement, en fonction de p et q, les valeurs de $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$ et de $r^2 s^2 d\varphi\, d\omega$, et l'on sera conduit à l'équation

$$\frac{r^2 s^2\, d\varphi\, d\omega}{4h^2(dx^2+dy^2)} = \frac{p^2 dq^2 - q^2 dp^2}{(1+q^2)^2 dp^2 + (1-p^2)^2 dq^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}},$$

en posant

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{C}'}{2} + \frac{\mathrm{A}}{2}\cos\varphi - \frac{\mathrm{B}}{2}\cos\omega - \frac{\mathrm{H}^2}{h}\,\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\omega+\varphi)},$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{C} + \frac{2\,\mathrm{A}h}{r} + \frac{2\,\mathrm{B}h}{s} - \frac{\mathrm{H}^2 h}{y^2}.$$

Les polynômes M et N étant exprimés en p et q, on aura l'équation

$$\mathrm{P}\,dq^2 = \mathrm{Q}\,dp^2,$$

dans laquelle

$$P = Mp^2 - N(1 - p^2)^2, \quad Q = Mq^2 + N(1 + q^2)^2.$$

Le résultat cherché ne devant différer de celui qu'on obtient dans le problème des centres fixes que par les termes contenant H^2 en facteur, calculons ces termes; nous aurons

$$\frac{h}{y^2} = \frac{(1+q^2)^2(1-p^2)^2}{h(1+p^2)^2(1-q^2)^2}, \quad \frac{1}{h}\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi+\omega)} = \frac{4p^2q^2}{h(p^2+1)^2(1-q^2)^2}.$$

Pour avoir le terme qui multiplie H^2 dans P, on multipliera les valeurs que nous venons de trouver pour $\frac{h}{y^2}$ et $\frac{1}{h}\frac{\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2(\omega+\varphi)}$, respectivement par p^2 et $(1-p^2)^2$; et, en retranchant la seconde de la première, on aura

$$\frac{(1-p^2)^2 p^2}{h(1+p^2)^2};$$

on trouverait de même $\frac{(1+q^2)^2 q^2}{h(1-q^2)^2}$ pour le multiplicateur de H^2 dans Q.

L'équation aux variables séparées devient ainsi

$$\frac{dp}{\sqrt{Cp^2 + \frac{1}{2}(A+B)(1-p^4) - \frac{1}{2}C'(1-p^2)^2 - \frac{H^2}{h}\frac{(1-p^2)^2p^2}{(1+p^2)^2}}}$$
$$= \frac{dq}{\sqrt{Cq^2 + \frac{1}{2}(A-B)(1-q^4) + \frac{1}{2}C'(1+q^2)^2 - \frac{H^2}{h}\frac{(1+q^2)^2q^2}{(1-q^2)^2}}}.$$

Si l'on veut donner à l'équation précédente la forme qu'elle prend lorsqu'on choisit pour variables $\rho = \frac{r+s}{2}$, $\mu = \frac{r-s}{2}$, on trouve, en posant $Ch + 2C'h + H^2 = D$,

$$\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - h^2}\sqrt{C\rho^4 + 2(A+B)h\rho^3 - Dh\rho^2 + H^2h^3}}$$
$$= \frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{\mu^2 - h^2}\sqrt{C\mu^4 - 2(A-B)h\mu^3 - Dh\mu^2 + H^2h^3}};$$

ce qui est la formule de la première méthode, dans laquelle on aurait fait $k = 0$.

On trouverait ensuite dt et $d\varphi$, sans difficulté.

IV.

Méthode de Lagrange [*]. — Prenons pour origine le point autour duquel la rotation a lieu, et, pour axe des z, l'axe de rotation. Soient (a, b), $(-a, -b)$ les coordonnées des deux centres mobiles qui sont dans le plan des x, y leur distance; u, v les distances du point attiré aux deux centres. Les équations du mouvement seront

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{A(x-a)}{u^3} + \dfrac{B(x+a)}{v^3} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{A(y-b)}{u^3} + \dfrac{B(y+b)}{v^3} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{Az}{u^3} + \dfrac{Bz}{v^3} = 0, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre les équations

$$a^2 + b^2 = f^2, \quad y = \frac{b}{a}x.$$

De ces équations on déduit, comme nous l'avons vu pour la méthode d'Euler, l'équation des forces vives

$$(2)\quad \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{2A}{u} + \frac{2B}{v} + 4C.$$

Multipliant les équations (1) respectivement par $x - a$, $y - b$, z, et ajoutant, il viendra

$$(3)\quad \frac{(x-a)d^2x + (y-b)d^2y + zd^2z}{dt^2} = -\frac{A}{u} - B\frac{u^2 + v^2 - f^2}{2v^3}.$$

On trouve aussi sans difficulté, en différentiant deux fois l'équation,

$$u^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2,$$

et divisant par dt^2,

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u^2}{2dt^2} = \dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + (x-a)\dfrac{d^2x}{dt^2} + (y-b)\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \qquad + z\dfrac{d^2z}{dt^2} - \dfrac{dadx + dbdy}{dt^2}. \end{cases}$$

---

[*] *Anciens Mémoires de l'Académie de Turin*, tome V.

Ajoutons maintenant membre à membre les équations (2), (3), (4), il viendra

$$(5)\qquad \frac{d^2u^2}{dt^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{2}\left(\frac{3}{v} + \frac{f^2 - u^2}{v^3}\right) - \frac{dadx + dbdy}{dt^2} + 4C.$$

On trouverait d'une manière semblable

$$(6)\qquad \frac{d^2v^2}{dt^2} = \frac{B}{v} + \frac{A}{2}\left(\frac{3}{u} + \frac{f^2 - v^2}{u^3}\right) + \frac{dadx + dbdy}{dt^2} + 4C.$$

On voit que la mobilité des centres introduit dans les équations (5) et (6), auxquelles Lagrange ramène principalement le problème des centres fixes, une seule quantité nouvelle $\frac{dadx + dbdy}{dt^2}$. Or je dis que cette quantité peut s'exprimer par une fonction très-simple de u et de v.

En effet, on a d'abord

$$dadx + dbdy = \frac{da\,(ydx - xdy)}{y},$$

comme on le voit en se servant des équations

$$y = \frac{b}{a}x, \quad ada + bdb = 0.$$

D'un autre côté, en différentiant l'équation

$$y = \frac{b}{a}x,$$

on trouve facilement

$$da = b\,\frac{(ydx - xdy)}{s^2},$$

s désignant la distance de l'origine à la projection du point attiré sur le plan des x, y. Donc

$$dadx + dbdy = \frac{b}{y}\,\frac{(ydx - xdy)^2}{s^2} = \frac{f}{2}\,\frac{(ydx - xdy)^2}{s^3}.$$

Mais en multipliant la première des équations (1) par y, la deuxième par x, et retranchant, on a

$$\frac{yd^2x}{dt^2} - \frac{xd^2y}{dt^2} = 0;$$

intégrant

$$y\,dx = x\,dy = \mathrm{H}\,dt,$$

substituant la valeur de $y\,dx - x\,dy$, dans l'expression de $da\,dx - db\,dy$, il viendra

$$\frac{da\,dx + db\,dy}{dt^2} = \frac{f}{2}\frac{\mathrm{H}^2}{s^3} = \frac{4f^4\mathrm{H}^2}{(v^2-u^2)^3},$$

s étant facilement trouvé égal à $\frac{v^2-u^2}{2f}$.

Les équations (5) et (6) deviennent donc

$$(7)\qquad \frac{d^2u^2}{dt^2} = \frac{\mathrm{A}}{u} + \frac{\mathrm{B}}{2}\left(\frac{3}{v} + \frac{f^2-u^2}{v^3}\right) - \frac{4f^4\mathrm{H}^2}{(u^2-v^2)^3} + \mathrm{C},$$

$$(8)\qquad \frac{d^2v^2}{dt^2} = \frac{\mathrm{B}}{v} + \frac{\mathrm{A}}{2}\left(\frac{3}{u} + \frac{f^2-v^2}{u^3}\right) + \frac{4f^4\mathrm{H}^2}{(u^2-v^2)^3} + \mathrm{C}.$$

En faisant $\mathrm{H} = 0$, on a les équations de Lagrange pour le problème des centres fixes.

La question de déterminer les deux équations finies entre u, v et t est ramenée à l'intégration des équations (7) et (8). Nous connaissons déjà une intégrale du premier ordre de ces deux équations : c'est l'équation des forces vives dans laquelle il serait très-facile de tout ramener aux variables u et v. Mais il sera plus élégant de chercher, avec Lagrange, les intégrales des équations (7) et (8), en déduisant de ces équations, par des combinaisons diverses, d'autres équations telles, que les premiers membres soient des différentielles exactes, et telles aussi que, dans les seconds membres, les multiplicateurs de A, B, etc., soient des différentielles exactes de deux variables. Or, comme il arrive que les multiplicateurs de H^2, dans les équations dont nous venons de parler, sont des différentielles exactes de deux variables, la marche de Lagrange peut être appliquée sans aucune modification; et même il n'y a de calcul nouveau que celui des intégrations des fonctions différentielles de deux variables qui multiplient H^2 dans les diverses équations intégrables.

Nous représenterons, pour abréger, dans les calculs qui vont suivre, par P, Q, R, etc., l'ensemble des termes indépendants de H^2,

et qui sont les mêmes lorsque les centres sont fixes ou lorsqu'ils sont mobiles.

Multiplions les équations (7) et (8) respectivement par $d.v^2$ et $d.u^2$, ajoutons membre à membre, puis intégrons; il viendra

$$\frac{d.u^2 \times d.v^2}{2\,dt^2} = \mathrm{P} - \frac{4f^4\mathrm{H}^2}{2(u^2 - v^2)^2}. \tag{9}$$

Multiplions maintenant les équations (7) et (8) respectivement par $2v^2 d.u^2$ et $2u^2 d.v^2$, l'équation (9) par $d.u^2 + d.v^2$; retranchons de la somme des deux premières ainsi formées la troisième, puis intégrons les deux membres de l'équation résultant de cette combinaison, nous aurons

$$\frac{v^2(d.u^2)^2 + u^2(d.v^2)^2}{2\,dt^2} = \mathrm{Q} + 2f^4\mathrm{H}^2\,\frac{(u^2+v^2)}{(u^2-v^2)^2}. \tag{10}$$

Si l'on ajoute à cette équation ou qu'on en retranche l'équation (9) multipliée par $2uv$, on obtient

$$\frac{(vd.u^2 + ud.v^2)^2}{4\,dt^2} = \mathrm{R} + \frac{f^4\mathrm{H}^2}{(u+v)^2},$$

$$\frac{(vd.u^2 - ud.v^2)^2}{4\,dt^2} = \mathrm{S} + \frac{f^4\mathrm{H}^2}{(u-v)^2},$$

R et S étant respectivement des fonctions de $u+v$ et $u-v$. En posant $u+v=p$, $(u-v)=q$, les deux équations précédentes deviennent

$$uv\,dp = \sqrt{\mathrm{R} + \frac{f^4\mathrm{H}^2}{p^2}},$$

$$uv\,dq = \sqrt{\mathrm{S} + \frac{f^4\mathrm{H}^2}{q^2}};$$

d'où l'on déduit

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp}{\sqrt{\mathrm{R} + \frac{f^4\mathrm{H}^2}{p^2}}} &= \frac{dq}{\sqrt{\mathrm{S} + \frac{f^4\mathrm{H}^2}{q^2}}}, \\ dt &= \frac{(p^2-q^2)^2\,dp}{4\sqrt{\mathrm{R} + \frac{f^4\mathrm{H}^2}{p^2}}}, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

ou bien

$$(12) \qquad dt = \frac{p^2\,dp}{4\sqrt{R + \frac{f^4 H^2}{p^2}}} - \frac{q^2\,dq}{4\sqrt{S + \frac{f^4 H^2}{q^2}}}.$$

Enfin, on aura l'angle φ du plan méridien avec le plan fixe des xy par l'équation

$$\frac{s^2\,d\varphi}{dt} = H,$$

qui résulte, comme on sait, de l'équation démontrée

$$y\,dx - x\,dy = H\,dt.$$

On aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{4Hf^2}{(u^2 - v^2)^2} = \frac{4Hf^2}{p^2 q^2};$$

mettant dans cette équation, pour dt, la valeur tirée de l'équation (12), on aura

$$d\varphi = \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{4\sqrt{R + \frac{f^4 H^2}{p^2}}},$$

ou bien

$$(13) \qquad d\varphi = \frac{dp}{4p^2\sqrt{R + \frac{f^4 H^2}{p^2}}} - \frac{dq}{4q^2\sqrt{S + \frac{f^4 H^2}{q^2}}}.$$

En remettant dans les équations (11), (12) et (13), pour R et S, leurs valeurs

$$R = Cp^4 + (A + B)\,p^3 + Dp^2 - (A + B)f^2 p + E,$$
$$S = Cq^4 + (A - B)\,q^3 + Dq^2 - (A - B)f^2 q + E,$$

et observant qu'en vertu d'une relation facile à trouver entre les trois constantes arbitraires C, D, E et les quantités connues, les polynômes $Rp^2 + f^4 H^2$, $Sq^2 + f^4 H^2$ sont respectivement divisibles par $p^2 - f^2$ et $q^2 - f^2$, on retombe précisément sur les formules trouvées par les autres méthodes.

V.

Discussion. — Nous avons trouvé précédemment, en posant

$$P = (\rho^2 - c^2)[2k\rho^6 - (2kc^2 - C)\rho^4 + (g+g')\rho^3 - B\rho^2 + Ac^2],$$
$$Q = (\mu^2 - c^2)[2k\mu^6 - (2kc^2 - C)\mu^4 + (g-g')\mu^3 - B\mu^2 + Ac^2],$$

les trois équations suivantes :

$$(1)\qquad \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{P}} = \frac{\mu\,d\mu}{\sqrt{Q}},\quad \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{P}} - \frac{\mu^3 d\mu}{\sqrt{Q}} = dt,\quad \frac{c^2 d\rho}{\rho\sqrt{P}} - \frac{c^2 d\mu}{\mu\sqrt{Q}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{A}},$$

dans lesquelles les variables sont séparées. Comme on le voit, les valeurs des inconnues dépendront, en général, des fonctions abéliennes, même quand il n'y aurait aucune force appliquée au centre fixe, et que l'une des forces appliquées aux centres mobiles serait nulle. Si l'on excepte le cas où chacune des équations $P = 0$, $Q = 0$ aurait des racines égales, les intégrales des équations (1) ne pourront pas se réduire aux fonctions elliptiques.

Pour déterminer les constantes d'intégration A, B, C, il suffira de diviser par dt les deux membres de chacune des équations (1), et de remplacer dans ces équations ρ, μ, φ, $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ par leurs valeurs initiales supposées connues. On aura ainsi trois équations qui ne contiendront pas d'autres inconnues que A, B, C. On pourrait aussi, en se donnant la vitesse initiale, déterminer la constante C par l'équation des forces vives, et les deux autres A et B par deux des équations (1), ou deux équations résultant de leur combinaison.

A part le cas des racines égales dont nous avons parlé tout à l'heure, pour que les quadratures des équations (1) dépendent des fonctions elliptiques, il est nécessaire et suffisant que les puissances impaires de ρ et μ disparaissent sous les radicaux, et que l'on ait

$$g + g' = 0, \quad g - g' = 0,$$

c'est-à-dire que les deux centres mobiles ne soient pas des centres d'action. Le problème que l'on résout alors n'est plus, à proprement parler, le problème des centres mobiles. Nous nous arrêterons cepen-

dant un moment sur sa solution, parce qu'elle nous fournira la démonstration d'un théorème fondamental d'analyse.

En effet, g et g' étant égaux à zéro, le point matériel n'est plus soumis qu'à une seule force proportionnelle à la distance émanant d'un centre fixe, et la courbe décrite par le point mobile est, d'après un théorème connu, une section conique dont le centre se confond avec le centre d'action. La courbe décrite dans le plan mobile sera, en général, différente d'une section conique, et il sera facile d'en trouver l'équation en résolvant ce problème très-simple de géométrie analytique : Trouver le lieu des points qui sont les traces successives laissées par une section conique fixe sur un plan mobile autour d'un axe passant par le centre de la section, et situé hors de son plan. L'équation de la courbe étant obtenue en coordonnées polaires, par exemple, on pourra toujours, par une transformation de coordonnées, l'obtenir en coordonnées ρ et μ. Mais, d'un autre côté, la première des équations (1), si l'on y fait

$$g = 0, \quad g' = 0, \quad \rho^2 = \lambda, \quad \mu^2 = \nu,$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^4 + D\lambda^3 + E\lambda^2 + F\lambda + G}} = \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^4 + D\nu^3 + E\nu^2 + F\nu + G}};$$

donc cette dernière équation est susceptible d'une intégrale algébrique.

On est ainsi conduit à la démonstration générale du théorème d'Euler, sans qu'il soit besoin de connaître aucune des transformations que l'on peut faire subir aux polynômes du quatrième degré contenus sous les radicaux.

Dans le cas où l'on a $k = 0$, le point matériel se meut en ligne droite, et la courbe dans le plan mobile est une hyperbole, puisqu'elle peut être considérée comme l'intersection d'un hyperboloïde de révolution par un plan qui passe par l'axe de révolution. Cette remarque conduirait encore au théorème d'Euler.

Ce n'est pas seulement dans le cas très-particulier que nous venons de considérer que la courbe dans le plan mobile peut être une section conique. On démontre, de la même manière que pour le pro-

blème des centres fixes, qu'en supposant les trois centres agissant à la fois suivant la loi indiquée, la courbe dans le plan mobile peut être une ellipse $\rho = \rho_0$, ou une hyperbole $\mu = \mu_0$; ρ_0 satisfaisant aux équations

$$P = 0, \quad \frac{dP}{d\rho} = 0,$$

et μ_0 aux équations

$$Q = 0, \quad \frac{dQ}{d\mu} = 0.$$

L'ellipse et l'hyperbole sont ainsi données chacune par une solution singulière de la première des équations (1); je ne crois pas utile de donner ici la démonstration qui est tout à fait la même que pour le problème des centres fixes : il me suffira de renvoyer à un travail récent de M. Serret. Je passe tout de suite à la partie la plus intéressante de la discussion.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que ρ_0, ν_0 étaient les valeurs initiales quelconques de ρ et de μ; supposons maintenant que la valeur initiale de ρ ou de μ soit égale à c. Nous aurons encore deux solutions singulières sous les conditions précédemment énoncées, c'est-à-dire pourvu que, pour $\rho = c$, on ait $\frac{dP}{d\rho} = 0$, et pour $\mu = c$, $\frac{dQ}{d\mu} = 0$. Mais si la somme 2ρ des distances du point attiré aux deux centres fixes est précisément égale à la distance $2c$ de ces centres, le point attiré se trouve évidemment sur la ligne qui joint les centres d'action, et entre les deux. Si $2\mu = c$, le point attiré se trouve encore sur la ligne des centres, mais en dehors des centres. Ainsi, le cas particulier où le point attiré se trouve sur la ligne même des centres est résolu par deux solutions singulières de la première des équations du mouvement. Voyons ce que deviennent en même temps les deux autres équations du mouvement. Ces deux équations, qui doivent suffire à la détermination complète du mouvement, contiennent trois constantes arbitraires; mais l'une d'elles peut s'exprimer en fonction des deux autres par la relation $\frac{dP}{d\rho} = 0$, pour $\rho = c$.

En supposant, pour plus de simplicité, $k = 0$, on a

$$P = \sqrt{(\rho^2 - c^2)\left[2C\rho^4 + 2(g + g')\rho^3 - B\rho^2 + Ac^2\right]};$$

la condition pour que le polynôme P ait deux racines égales à c est évidemment exprimée par l'équation

$$2Cc^2 + 2(g+g')c - B + A = 0,$$

d'où l'on tire

$$B = A + 2Cc^2 + 2(g+g')c.$$

Avant de faire $\rho = c$ dans les équations qui donnent $d\varphi$ et dt, remplaçons-y $\frac{\rho d\rho}{\sqrt{P}}$ par $\frac{\mu d\mu}{\sqrt{Q}}$; nous aurons

$$d\varphi = \frac{c^2\sqrt{A(\mu^2-\rho^2)}}{\rho^2\mu\sqrt{Q}}\,d\mu, \quad dt = \mu\frac{(\rho^2-\mu^2)}{\sqrt{Q}}\,d\mu.$$

Faisons maintenant $\rho = c$, et remplaçant la constante B par la valeur que nous venons de trouver, on aura, pour la solution du problème du mouvement du point matériel entre les deux centres mobiles et sur la ligne qui les joint, les deux équations suivantes :

$$d\varphi = \frac{H\sqrt{\mu^2-c^2}}{\mu\sqrt{M}}\,d\mu, \tag{2}$$

$$dt = \frac{\mu\sqrt{\mu^2-c^2}}{\sqrt{M}}\,d\mu. \tag{3}$$

En posant

$$\sqrt{A} = H$$

et

$$M = 2C\mu^4 + 2(g-g')\mu^3 - [H^2 + 2Cc^2 + 2(g+g')c]\mu^2 + H^2c^2,$$

μ étant évidemment la distance du point attiré à l'origine des coordonnées, l'équation (2) est l'équation de la courbe en coordonnées polaires. Quant aux constantes H et C, elles seront déterminées au moyen des équations

$$\frac{V^2}{2} = \frac{g}{c+\mu} + \frac{g'}{c-\mu} + C, \tag{4}$$

$$\mu^2\,d\varphi = H\,dt, \tag{5}$$

dans lesquelles on aura remplacé V, μ, $\frac{d\varphi}{dt}$ par leurs valeurs initiales

données. L'équation (5) se déduit d'ailleurs des équations (2) et (3) par la division membre à membre de ces deux équations.

On arrivera de la même manière aux équations du problème dans le cas de $\mu = c$, et il est facile de voir que les équations qui conviennent à ce cas peuvent se déduire des équations correspondantes à $\mu = c$ par le simple changement de g' en $-g'$. (Nous supposons tacitement que g' est la force appliquée au centre d'action qui est le plus près du mobile, lorsque celui-ci se trouve en dehors des centres.)

On peut vérifier d'une manière très-simple que les formules précédemment trouvées pour le cas qui nous occupe sont bien celles que nous donnerait la solution directe du problème.

En effet, dans ce cas, le point matériel peut être considéré comme soumis à l'action d'une force unique émanant d'un centre fixe, et dont l'intensité serait $\frac{g}{c+\mu} \pm \frac{g'}{c-\mu}$, le signe $+$ ou le signe $-$ étant choisi selon que le mobile est ou n'est pas entre les deux centres d'action. Mais, d'après les formules données en Mécanique pour le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, on peut écrire immédiatement les deux équations

$$\frac{d\mu^2 + \mu^2 d\varphi^2}{2\,dt^2} = \frac{g}{c+\mu} \pm \frac{g'}{c-\mu} + \mathrm{C},$$

$$\frac{\mu^2 d\varphi}{dt} = \mathrm{H};$$

et en faisant le calcul très-simple relatif à la séparation des variables, on retombe précisément sur les équations (2) et (3), ou sur les équations qui s'en déduisent par le changement de g' en $-g'$.

Les formules (2) et (3) font, en général, dépendre la solution du problème des fonctions abéliennes; mais, dans le cas de $g = g'$ si le mobile se trouve entre les deux centres d'action, et $g = -g'$ si le point attiré se trouve en dehors des centres, la solution ne dépend plus que des fonctions elliptiques.

Nous pouvons, maintenant, donner une idée de la courbe décrite dans les deux cas particuliers que nous venons d'énoncer, et auxquels, à partir de ce moment, nous allons nous borner uniquement.

Les équations du mouvement (2) et (3) peuvent se mettre sous la forme

$$(6) \qquad \frac{\mu d\varphi}{d\mu} = \frac{H\sqrt{c^2-\mu^2}}{\sqrt{2C(\mu^2-\alpha^2)(6^2-\mu^2)}},$$

$$(7) \qquad \frac{d\mu}{dt} = \frac{\sqrt{2C(\mu^2-\alpha^2)(6^2-\mu^2)}}{\mu\sqrt{c^2-\mu^2}},$$

α^2 et 6^2 étant des valeurs de μ^2, que l'on obtient en posant

$$M = 2C\mu^4 - (H^2 + 2Cc^2 + 4g)\mu^2 + H^2c^2 = 0.$$

(On trouve facilement d'ailleurs que c est compris entre les deux valeurs α et 6.)

Les équations précédentes (6) et (7) s'appliqueront au mouvement du point mobile sur la ligne des centres d'action, que ce point soit ou ne soit pas entre les deux centres, pourvu que l'on suppose que la force attractive appliquée au centre le plus proche du mobile devienne répulsive lorsque le mobile se trouve sur le prolongement de la ligne des centres : c'est ce que nous supposerons dans tout ce qui va suivre.

Il y aura trois cas à considérer dans la discussion, suivant que C sera positif, négatif ou nul; c'est-à-dire en désignant par V_0 et μ_0 les valeurs initiales de V et de μ, suivant que l'on aura

$$V_0^2 > \frac{4gc}{c^2-\mu_0^2}, \quad V_0^2 < \frac{4gc}{c^2-\mu_0^2}, \quad \text{ou} \quad V_0^2 = \frac{4gc}{c^2-\mu_0^2}.$$

1^er^ *cas.* $V_0^2 > \dfrac{4gc}{c^2-\mu_0^2}$.

L'équation (6) montre que, depuis la valeur $\mu = \alpha$ jusqu'à $\mu = c$, on aura des valeurs réelles pour l'angle φ; que, pour $\mu = \alpha$, la courbe est perpendiculaire au rayon vecteur; et que, pour $\mu = c$, elle est tangente au rayon vecteur. On aura ainsi une branche de courbe qui commencera à une distance de l'origine $\mu = \alpha$, et qui se terminera au cercle $\mu = c$.

Si l'on suppose maintenant que le mobile se trouve sur le prolongement de la ligne des centres sur lequel il a été primitivement placé,

on verra sans difficulté que la courbe décrite par le mobile, extérieure au cercle $\mu = c$, commence par être perpendiculaire au rayon vecteur, à une distance de l'origine $\mu = \beta$, et finit par devenir tangente au rayon vecteur lorsque celui-ci est infini.

2^e^ *cas.* $V_0^2 < \frac{4gc}{c^2 - \mu_0^2}$.

Ce second cas se discuterait comme le précédent. On trouverait d'abord, dans l'intérieur du cercle $\mu = c$, une branche de courbe passant par le centre du cercle, et terminée au rayon vecteur $\mu = \alpha$, auquel elle est perpendiculaire; puis, hors du cercle, une seconde branche partant perpendiculairement de la circonférence, pour se terminer à la distance $\mu = \beta$, perpendiculairement au rayon vecteur.

3^e^ *cas.* $V_0^2 = \frac{4gc}{c^2 - \mu_0^2}$.

C étant égal à zéro, il est facile de voir qu'en posant $\frac{Hc}{\sqrt{gc + H^2}} = \alpha$, l'équation différentielle de la courbe peut s'écrire

$$d\varphi = \frac{\alpha}{c\mu} \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}.$$

La partie de la courbe située hors du cercle n'existe plus maintenant, et l'on a dans l'intérieur de ce cercle une branche de courbe analogue à celle qui a été trouvée dans le premier cas. Mais ce qui est remarquable, c'est que cette branche de courbe est la moitié de l'arc d'une épicycloïde compris entre deux points de rebroussement successifs. Cette épicycloïde, comme il est facile de le voir d'ailleurs, est engendrée par un point de la circonférence d'un cercle de rayon $\frac{c - \alpha}{2}$ roulant intérieurement sur le cercle $\mu = c$.

Dans le dernier cas que nous venons d'examiner, l'équation différentielle de la courbe était intégrable; on peut se demander s'il existe d'autres cas d'intégration.

Il est évident que les seconds membres des équations (2) et (3), dans lesquelles M a la valeur que nous avons donnée plus haut, ne pourraient devenir des différentielles exactes que dans deux cas : si $\sqrt{\mu^2 - c^2}$

était facteur commun au numérateur et au dénominateur des seconds membres, ou bien si M était un carré parfait. Or il est facile de voir d'abord que le dernier cas ne peut jamais se présenter; car, en exprimant la condition pour que $M = 0$ ait deux racines égales, on trouve une équation impossible entre H et C. Quant au premier cas, si l'on met l'équation différentielle de la courbe sous la forme

$$d\varphi = \frac{H\sqrt{c^2 - \mu^2}\, d\mu}{\mu\sqrt{(C\mu^2 - H^2)(c^2 - \mu^2) + 4gc}},$$

on voit que $\sqrt{c^2 - \mu^2}$ ne pourrait être facteur commun que si $gc = 0$. Or les cas de $g = 0$, $c = 0$ sont évidemment à exclure; et d'ailleurs si l'on faisait l'intégration, on trouverait l'équation polaire d'une ligne droite, comme cela doit être évidemment.

Démonstration de deux théorèmes de M. Jacobi. — *Application au problème des perturbations planétaires;*

Par M. A.-H. DESBOVES.

(Thèse d'Astronomie présentée à la Faculté des Sciences de Paris, le 3 avril 1848.)

I.

Lorsque le principe des forces vives a lieu, les équations du mouvement d'un ou de plusieurs points libres peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{dU}{dy}, \quad \text{etc.} \tag{1}$$

Supposons qu'on ait obtenu les intégrales de ces équations avec le nombre $2n$ de constantes arbitraires double du nombre des variables indépendantes, et qu'on veuille avoir les intégrales des équations du mouvement troublé

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= m\frac{dU}{dx} + \frac{d\Omega}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= m\frac{dU}{dy} + \frac{d\Omega}{dy}, \quad \text{etc.} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

D'après la théorie de la variation des constantes arbitraires, on peut supposer que, dans le mouvement primitif et dans le mouvement troublé, les coordonnées $x, y, z,\ldots,$ et les vitesses $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},\ldots$ sont exprimées de la même manière, au moyen des éléments $a_1, b_1, a_2, b_2,\ldots, a_n, b_n$; mais, dans le cas du mouvement troublé, on a à résoudre la question de trouver les variations de ces dernières quantités pour une époque quelconque du mouvement. Lagrange a donné une forme

très-élégante aux équations qui servent à déterminer la variation des constantes arbitraires dans le cas qui nous occupe. Il a remarqué, en particulier, que si les éléments a_1, b_1, a_2, b_2,..., a_n, b_n sont les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses, les équations du problème prennent la forme extrêmement simple

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{da_1}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{db_1}, & \dfrac{da_2}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{db_2},\ldots, & \dfrac{da_n}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{db_n}, \\ \dfrac{db_1}{dt} = \dfrac{d\Omega}{da_1}, & \dfrac{db_2}{dt} = \dfrac{d\Omega}{da_2},\ldots, & \dfrac{db_n}{dt} = \dfrac{d\Omega}{da_n}. \end{array}\right.$$

Mais, en se fondant sur les travaux de M. Hamilton, M. Jacobi a donné un autre système de constantes dont les variations sont données par des équations de la forme des équations (3), et qui sont plus avantageuses dans le problème des perturbations planétaires. Voici comment sont données les constantes arbitraires de M. Jacobi :

Θ étant une fonction de $x, y, z,\ldots, \alpha_1, \alpha_2,\ldots$ qui satisfait à l'équation aux différences partielles

$$\sum \frac{1}{m}\left[\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2\right] = 2(\mathrm{U}+\mathrm{C}),$$

et les intégrales des équations (1) étant, comme on sait, les suivantes :

$$(3)\qquad \frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1,\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2,\ldots,\quad \frac{d\Theta}{d\mathrm{C}} = t + \tau,$$

les $2n$ constantes arbitraires α_1, α_2,..., C, τ jouissent de la même propriété que les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses, c'est-à-dire qu'on aura

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = +\dfrac{d\Omega}{d\beta_1}, & \dfrac{d\alpha_2}{dt} = +\dfrac{d\Omega}{d\beta_2},\ldots, & \dfrac{d\mathrm{C}}{dt} = \dfrac{d\Omega}{d\tau}, \\ \dfrac{d\beta_1}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\alpha_1}, & \dfrac{d\beta_2}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\alpha_2},\ldots, & \dfrac{d\tau}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\mathrm{C}}. \end{array}\right.$$

Le théorème que je viens de reproduire d'après M. Jacobi se trouve énoncé sans démonstration dans le cinquième volume des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Je me propose de le démontrer ici, en me servant comme lemme d'une autre proposition donnée aussi sans démonstration par M. Jacobi, à la suite de celle que je

viens d'énoncer. Je démontrerai d'abord cette proposition, dont voici l'énoncé :

Soit donné le système

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{llll} \frac{da_1}{dt} = -\frac{dH}{db_1}, & \frac{da_2}{dt} = -\frac{dH}{db_2}, \ldots, & \frac{da_n}{dt} = -\frac{dH}{db_n}, \\ \frac{db_1}{dt} = \frac{dH}{da_1}, & \frac{db_2}{dt} = \frac{dH}{da_2}, \ldots, & \frac{db_n}{dt} = \frac{dH}{da_n}, \end{array}\right.$$

H étant une fonction quelconque de t et des variables a_1, b_1, a_2, b_2,..., a_n, b_n.

Soient α_1, β_1, α_2, β_2,..., α_n, β_n de nouvelles variables, et ψ une fonction quelconque des variables α_1, α_2,..., α_n, a_1, a_2,..., a_n seulement; supposons de plus les nouvelles variables liées aux anciennes par les équations suivantes :

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{llll} \frac{d\psi}{d\alpha_1} = \beta_1, & \frac{d\psi}{d\alpha} = \beta_2, \ldots, & \frac{d\psi}{d\alpha_n} = \beta_n, \\ \frac{d\psi}{d\alpha_1} = -b_1, & \frac{d\psi}{d\alpha_2} = -b_2, \ldots, & \frac{d\psi}{d\alpha_n} = -b_n. \end{array}\right.$$

Si l'on exprime, au moyen des équations précédentes, la fonction H par t et les nouvelles variables α_1, α_2,..., α_n, β_1, β_2,..., β_n, on aura entre ces dernières des équations différentielles précisément de la même forme que les proposées, savoir :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{llll} \frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{dH}{d\beta_1}, & \frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{dH}{d\beta_2}, \ldots, & \frac{d\alpha_n}{dt} = -\frac{dH}{d\beta_n}, \\ \frac{d\beta_1}{dt} = \frac{dH}{d\alpha_1}, & \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{dH}{d\alpha_2}, \ldots, & \frac{d\beta_n}{dt} = \frac{dH}{d\alpha_n}. \end{array}\right.$$

Démonstration. Si l'on ne suppose aucune forme particulière aux équations qui lient entre elles les nouvelles et les anciennes variables, on aura, en général, pour déterminer la variation des nouveaux éléments, les équations connues

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dH}{d\alpha_1} dt = [\alpha_1, \beta_1]\, d\beta_1 + [\alpha_1, \alpha_2]\, d\alpha_2 + [\alpha_1, \beta_2]\, d\beta_1 + \ldots, \\ \frac{dH}{d\beta_1} dt = -[\alpha_1, \beta_1]\, d\alpha_1 + [\beta_1, \alpha_2]\, d\alpha_2 + [\beta_1, \beta_2]\, d\beta_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

les symboles $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_1, \alpha_2]$, etc., ayant leur signification ordinaire, c'est-à-dire qu'on a, par exemple,

$$[\alpha_1, \beta_1] = \frac{da_1}{d\alpha_1}\frac{db_1}{d\beta_1} - \frac{db_1}{d\alpha_1}\frac{da_1}{d\beta_1} + \frac{da_2}{d\alpha_1}\frac{db_2}{d\beta_1} - \frac{db_2}{d\alpha_1}\frac{da_2}{d\beta_1} + \ldots$$

Nous avons maintenant à faire voir que si les nouvelles variables $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ sont liées aux anciennes $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ par les équations (6), les équations (8) se réduiront à la forme des équations (7); or, pour cela, il suffit évidemment de prouver que l'on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned} &[\alpha_1, \beta_1] = 1, \quad [\alpha_2, \beta_2] = 1, \quad [\alpha_3, \beta_3] = 1, \ldots, \\ &[\alpha_1, \alpha_2] = 0, \quad [\alpha_1, \alpha_3] = 0, \quad [\alpha_1, \beta_2] = 0, \ldots. \end{aligned}$$

Prouvons, par exemple, que l'on a $[\alpha_1, \beta_1] = 1$.

Dans ce but, nous formerons d'abord les différentielles de ψ par rapport à α_1 et β_1. ψ est primitivement une fonction des variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$; mais nous supposons, en prenant les différentielles, qu'on regarde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ comme des fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ données par les équations (6). En désignant par $\left(\frac{d\psi}{d\alpha_1}\right)$ la différentielle de ψ prise par rapport à la variable α_1, en tant qu'elle entre explicitement dans la fonction, nous aurons les deux équations

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\alpha_1} &= \left(\frac{d\psi}{d\alpha_1}\right) + \frac{d\psi}{da_1}\frac{da_1}{d\alpha_1} + \frac{d\psi}{da_2}\frac{da_2}{d\alpha_1} + \ldots + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{d\alpha_1}, \\ \frac{d\psi}{d\beta_1} &= \frac{d\psi}{da_1}\frac{da_1}{d\beta_1} + \frac{d\psi}{da_2}\frac{da_2}{d\beta_1} + \ldots + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{d\beta_1}. \end{aligned}$$

Mais, en vertu des équations (6), on a

$$\left(\frac{d\psi}{d\alpha_1}\right) = \beta_1, \quad \frac{d\psi}{da_1} = -b_1, \quad \frac{d\psi}{da_2} = -b_2, \ldots, \quad \frac{d\psi}{da_n} = -b_n;$$

donc les équations précédentes deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\alpha_1} &= \beta_1 - b_1\frac{da_1}{d\alpha_1} - b_2\frac{da_2}{d\alpha_1} - \ldots - b_n\frac{da_n}{d\alpha}, \\ \frac{d\psi}{d\beta_1} &= -b_1\frac{da_1}{d\beta_1} - b_2\frac{da_2}{d\beta_1} - \ldots - b_n\frac{da_n}{d\beta_1}. \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on différentie la première des équations précédentes par rapport à β_1, la seconde par rapport à α_1, et qu'on égale les deux résultats en effaçant les termes analogues à $\frac{b_1 d^2 a_1}{d\alpha_1 d\beta_1}$, $\frac{b_1 d^2 a_1}{d\beta_1 d\alpha_1}$, qui se détruisent dans les deux membres, il reste précisément $[\alpha_1, \beta_1] = 1$.

On prouverait de la même manière que l'on a

$$[\alpha_2, \beta_2] = 1, \quad [\alpha_3, \beta_3] = 1, \ldots.$$

Si, d'un autre côté, on considère les quantités $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\beta_1, \beta_2]$,..., on voit tout de suite pourquoi, en appliquant le mode de démonstration précédent, ces quantités sont nulles et non pas égales à 1. C'est que, par exemple, dans les quantités $\frac{d\psi}{d\alpha_1}$, $\frac{d\psi}{d\alpha_2}$, qui doivent conduire à la quantité $[\alpha_1, \alpha_2]$, les termes β_1, β_2 étant différentiés par rapport à α_1, α_2 sont nuls, et dans $\frac{d\psi}{d\beta_1}$, $\frac{d\psi}{d\beta_2}$, qui doivent donner $[\beta_1, \beta_2]$, les termes analogues à β_1, β_2 ne se trouvent pas.

La proposition qui doit nous servir de lemme peut être considérée maintenant comme complétement démontrée.

Revenons au théorème, dont la démonstration est notre objet principal.

Lorsque les éléments variables sont les valeurs initiales des coordonnées a_1, a_2,..., a_n, et les valeurs initiales des quantités $\frac{mdx}{dt}$, $\frac{mdy}{dt}$,..., que nous désignerons par $-b_1$, $-b_2$,..., les équations qui déterminent les variations des éléments ont, comme nous l'avons déjà remarqué, la forme simple que Lagrange leur a donnée; ce sont, par exemple, les équations (5), dans lesquelles on aurait changé les signes de b_1, b_2,..., ou, ce qui revient au même, les signes des seconds membres.

Pour que le théorème que nous avons en vue soit démontré, il suffit, d'après le lemme, de faire voir que des équations semblables aux équations (6) lient les anciennes variables a_1, b_1, a_2, b_2,..., a_n, b_n, aux nouvelles α_1, β_1, α_2, β_2,..., α_n, β_n, obtenues comme il a été dit en commençant.

Or nous avons vu que les intégrales des équations (1) sont les suivantes :

$$\frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots, \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + \tau,$$

et l'on sait, d'ailleurs, qu'on a les intégrales premières

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{mdx}{dt}, \quad \frac{d\Theta}{dy} = \frac{mdy}{dt}, \quad \text{etc.}$$

Si l'on fait dans ces équations $t = 0$, on devra remplacer x, y, z, $\frac{mdx}{dt}$, $\frac{mdy}{dt}$,..., par leurs valeurs initiales a_1, a_2,..., a_n, $-b_1$, $-b_2$,..., $-b_n$; Θ deviendra alors une fonction de a_1, a_2,..., α_1, α_2,..., α_{n-1}, C, et l'on aura les équations

$$\frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots, \quad \frac{d\Theta}{dC} = \tau,$$

$$\frac{d\Theta}{da_1} = -b_1, \quad \frac{d\Theta}{da_2} = -b_2, \ldots, \quad \frac{d\Theta}{da_n} = -b_n,$$

c'est-à-dire précisément les équations (6).

Le théorème est donc démontré.

II.

Nous allons maintenant faire l'application du théorème de M. Jacobi au problème des perturbations planétaires.

La règle que nous avons donnée plus haut pour obtenir les constantes α_1, β_1, α_2, β_2, α_3, β_3 est la suivante :

Déterminez une fonction Θ de x, y, z qui contienne, outre la constante qu'on peut toujours lui ajouter, les trois constantes A, B, C, et qui satisfasse identiquement à l'équation aux différences partielles

$$\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_3}\right)^2 = 2(U + C),$$

puis formez les équations

$$\frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + \tau;$$

A, B, C, A', B', τ seront les six constantes demandées.

Supposons que, dans l'équation précédente, x, y, z soient remplacées par d'autres variables tellement choisies, que l'équation aux différences partielles ait une forme analogue à celle qu'elle avait d'abord, c'est-à-dire qu'elle soit de la forme

$$p_1\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + p_2\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + p_3\left(\frac{d\Theta}{d\rho_3}\right) = 2(\mathrm{U}+\mathrm{C}).$$

Si l'on obtient une fonction Θ de ρ_1, ρ_2, ρ_3 et des constantes arbitraires A, B, C satisfaisant identiquement à l'équation précédente, il est clair que si, dans l'expression de Θ, on met à la place de ρ_1, ρ_2, ρ_3 leurs valeurs en x, y, z, on aura une solution convenable de l'équation différentielle proposée. Mais, au lieu de remplacer d'abord dans Θ ρ_1, ρ_2,..., par leurs valeurs en x, y, z, il est évident qu'on peut prendre immédiatement les différentielles par rapport à A, B, C, sauf à imaginer qu'ensuite, dans

$$\frac{d\Theta}{d\mathrm{A}} = \mathrm{A}', \quad \frac{d\Theta}{d\mathrm{B}} = \mathrm{B}', \quad \frac{d\Theta}{d\mathrm{C}} = t + \tau,$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 soient remplacées par leurs valeurs en x, y, z. Le dernier changement de variables que nous venons d'indiquer n'est point d'ailleurs nécessaire; nous n'en avons parlé que pour la clarté de l'exposition. Ce qui importe seulement, c'est de bien savoir quelle est la signification des constantes A, B, C, A′, B′, τ: c'est une question sur laquelle nous reviendrons bientôt.

Il nous faut maintenant choisir notre système de coordonnées. Celui qui se présente naturellement à l'esprit est le système des coordonnées polaires dans l'espace qui satisfait à cette condition, que l'équation aux différences partielles ait une forme analogue à celle qu'elle avait d'abord.

M. Liouville, dans un cas très-général de la fonction des forces, a fait connaître une solution Θ exprimée au moyen des coordonnées polaires dans l'espace. Dans son Mémoire, cette solution Θ est déduite d'une autre beaucoup plus complexe, qui est exprimée en coordonnées elliptiques. Mais comme, dans ma Thèse sur le mouvement d'un point matériel attiré par deux centres mobiles, j'ai obtenu, pour une certaine expression de la fonction des forces, une solution Θ exprimée

en fonction des coordonnées elliptiques dans un plan et de l'angle de ce plan avec un plan fixe, il m'a paru convenable de déduire la fonction Θ, dans le cas des coordonnées polaires, de celle que j'avais déjà trouvée, et que je vais rappeler.

La fonction Θ dont il s'agit est la suivante :

$$\Theta = \int d\rho \sqrt{\frac{Ac^2 + B\rho^2 + 2C\rho^4 + 2f(\rho)}{\rho^2(\rho^2 - c^2)}} + \int d\mu \sqrt{\frac{-Ac^2 - B\mu^2 - 2C\mu^4 + 2F(\mu)}{\mu^2(c^2 - \mu^2)}}$$
$$+ \int d\psi \sqrt{A + \varpi(\psi)}.$$

Pour introduire dans Θ les coordonnées polaires, savoir, le rayon vecteur r, l'angle ψ du rayon vecteur avec l'axe de z, l'angle φ de l'axe des x et de la projection sur le plan des xy du rayon vecteur, il y a principalement à considérer le terme

$$\int d\mu \sqrt{\frac{-Ac^2 - B\mu^2 - 2C\mu^4 + 2F(\mu)}{\mu^2(c^2 - \mu^2)}},$$

sur lequel porte toute la difficulté.

En effet, pour passer du système de coordonnées dans lequel est exprimée la fonction Θ précédente au système des coordonnées polaires, il suffit de supposer que l'un des centres fixes auxquels se rapportent les quantités $\rho = \frac{r + r'}{2}$, $\mu = \frac{r - r'}{2}$ (r et r' étant les distances du point attiré aux deux centres) vienne se confondre avec l'autre : c'est ce qu'on exprime en faisant $\rho = r$, $\mu = 0$, $c = 0$.

Le premier terme de Θ devient alors, en y faisant $c = 0$, $\rho = r$,

$$\int \frac{dr}{r^2} \sqrt{2Cr^4 + Br^2 + 2f(r)},$$

et le dernier terme reste tel qu'il était. Pour calculer le second terme, écrivons-le sous la forme

$$\int \frac{d\frac{\mu}{c}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{c^2}}} \sqrt{-\frac{Ac^2}{\mu^2} - B + 2C\mu^2 + 2\frac{F(\mu)}{\mu^2}},$$

et cherchons la valeur limite de $\frac{\mu}{c}$ pour $\mu = 0$, $c = 0$. Pour trouver

cette limite, calculons la valeur de r' dans le triangle ayant pour côtés r, r', $2c$ et $90 - \psi$ pour angle compris entre les côtés r et $2c$; nous aurons

$$r' = \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4cr \sin \psi},$$

puis

$$\frac{\mu}{c} = \frac{\sqrt{r^2 + 4c^2 - 4cr \sin \psi} - r}{2c} = \frac{2c - 2r \sin \psi}{\sqrt{r^2 + 4c^2 - 4cr \sin \psi} + r},$$

et enfin, limite de $\frac{\mu}{c} = - \sin \psi$, et, par suite,

$$\frac{-d\frac{\mu}{c}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{c^2}}} = d\psi.$$

Introduisons ces valeurs dans le second terme mis sous la forme que nous venons de lui donner, nous aurons, pour ce second terme

$$-\int \frac{d\psi}{\sin \psi} \sqrt{- \mathrm{A} - \mathrm{B} \sin^2 \psi + 2\chi(\psi)};$$

la valeur complète de Θ devient alors, comme M. Liouville l'a trouvé d'une autre manière,

$$\Theta = \int \frac{dr}{r^2} \sqrt{\mathrm{B}r^2 + 2\mathrm{C}r^4 + 2f(r)} - \int \frac{d\psi}{\sin \psi} \sqrt{- \mathrm{A} - \mathrm{B} \sin^2 \psi + 2\chi(\psi)}$$
$$+ \int d\varphi \sqrt{\mathrm{A} + 2\Pi(\varphi)}.$$

Quant à la fonction U qui doit accompagner cette valeur de Θ, on peut la déduire aussi de la fonction U qui accompagnait notre ancienne valeur de Θ en mettant cette dernière fonction U sous la forme

$$\mathrm{U} = \frac{\frac{\mu^2}{c^2} f(\rho) + \rho^2 \frac{\mathrm{F}(\mu)}{c^2} + (\rho^2 - \mu^2) \frac{\Pi(\varphi)}{c^2}}{\frac{\mu^2}{c^2} \rho^2 (\rho^2 - \mu^2)},$$

et passant à la limite, on a

$$\mathrm{U} = \frac{\sin^2 \psi f(r) + r^2 \chi(\psi) + r^2 \Pi(\varphi)}{r^4 \sin^2 \psi}.$$

Si l'on fait

$$f(r) = r^4 f_1(r),$$

la valeur de U prend la forme plus simple

$$U = f_1(r) + \frac{\chi(\psi) + \Pi(\varphi)}{\rho^2 \sin^2 \psi}.$$

On aurait pu, du reste, arriver directement aux valeurs précédentes de U et de Θ par la méthode qui a conduit aux valeurs plus compliquées dont nous les avons déduites.

III.

Il faut maintenant appliquer les nouvelles valeurs de Θ et de U au problème des deux corps. U étant égal, dans le problème dont il s'agit, à $\frac{g}{r}$, on aura

$$f_1(r) = \frac{g}{r}, \quad f(r) = gr^3, \quad \chi(\psi) = 0, \quad \Pi(\varphi) = 0,$$

et, par suite,

$$\Theta = \int \frac{dr}{r}\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B} - \int \frac{d\varphi}{\sin\psi}\sqrt{-A - B\sin^2\psi} + \int d\varphi\sqrt{A}.$$

Formant maintenant les équations

$$\frac{d\Theta}{dA} = A', \quad \frac{d\Theta}{dB} = B', \quad \frac{d\Theta}{dC} = t + \tau,$$

on aura

$$(9) \qquad \int \frac{d\varphi}{2\sqrt{A}} + \int \frac{d\psi}{2\sin\psi\sqrt{-A - B\sin^2\psi}} = A',$$

$$(10) \qquad \int \frac{dr}{2r\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B}} + \int \frac{\sin\psi\, d\psi}{2\sqrt{-A - B\sin^2\psi}} = B',$$

$$(11) \qquad \int \frac{rdr}{\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B}} = t + \tau;$$

ou bien, en différentiant,

$$(12) \qquad d\varphi = \frac{\sqrt{A}\, d\psi}{\sin\psi\sqrt{-A - B\sin^2\psi}},$$

$$(13)\qquad \frac{dr}{r\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B}} = \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-A - B\sin^2\psi}},$$

$$(14)\qquad \frac{rdr}{\sqrt{2Cr + 2gr + B}} = dt.$$

On aurait pu aussi obtenir les formules précédentes sans passer par le calcul d'une nouvelle fonction Θ. Il eût suffi pour cela d'introduire dans les formules du problème des centres mobiles les conditions

$$k = 0, \quad g' = 0, \; c = 0, \quad \mu = 0, \quad \frac{\mu}{c} = -\sin\psi.$$

Le calcul, fait de cette manière, confirme pleinement d'ailleurs celui que nous venons de faire.

IV.

Nous pourrions faire voir dès maintenant, par les équations (12), (13) et (14), que le principe des aires a lieu, que la courbe est plane, et qu'elle est une section conique; mais, la question importante étant de trouver la signification des constantes A, B, C, A′, B′, τ, nous allons nous occuper immédiatement de cette question, et celle d'interpréter les équations (12), (13) et (14) se trouvera résolue en même temps.

Pour trouver la signification des différentes constantes arbitraires, nous allons comparer nos formules aux équations connues du mouvement elliptique auquel nous voulons nous borner. On voit d'abord immédiatement ce que représente la constante C; car puisque, d'un côté, nous avons posé

$$\frac{V^2}{2} = \frac{g}{r} + C,$$

et que, d'après la formule connue du mouvement elliptique, on a

$$\frac{V^2}{2} = g\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right),$$

on aura

$$C = -\frac{g}{2a}.$$

Pour trouver la signification des constantes arbitraires B et τ, nous comparerons à l'équation connue du mouvement elliptique,

$$\frac{rdr}{\sqrt{ga}\sqrt{e^2-\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}} = dt,$$

l'équation (14), mise sous la forme

$$\frac{rdr}{\sqrt{ga}\sqrt{1+\frac{B}{ga}-\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}} = dt.$$

On voit que l'on peut poser

$$1+\frac{B}{ga} = e^2,$$

d'où

$$B = -ga(1-e^2),$$

c'est-à-dire qu'au facteur près $-g$, B représente le demi-paramètre. Quand on a remplacé B et C par leurs valeurs dans l'équation (11), cette équation devient identique à celle du mouvement elliptique

$$t+\tau = \int \frac{rdr}{\sqrt{ga}\sqrt{e^2-\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}}.$$

Donc τ peut être considéré comme représentant le temps du passage par le périhélie.

Pour obtenir la valeur de la constante A, multiplions membre à membre les équations (12) et (14), puis divisons membre à membre cette nouvelle équation et l'équation (13); il viendra

$$r^2 \sin^2\psi \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{A};$$

ce qui donne le principe des aires appliqué à la projection de la trajectoire sur le plan des xy, et, par suite, à l'orbite elle-même, en admettant, ce qui résulte, du reste, de nos formules, que l'orbite est plane.

Le double de l'aire décrite dans l'unité de temps sur le plan de

l'orbite par le rayon vecteur étant égal à $\sqrt{ga(1-e^2)}$, nous aurons, en représentant par γ l'angle du plan de l'orbite avec le plan des xy,

$$\sqrt{A} = \sqrt{ga(1-e^2)}\cos\gamma,$$

ou

$$A = ga(1-e^2)\cos^2\gamma.$$

Pour obtenir maintenant la valeur de B′, nous allons déduire de nos équations l'équation polaire de l'ellipse. En désignant par θ l'angle fait par le rayon vecteur avec la ligne des nœuds, nous aurons, d'après le principe des aires, l'équation

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{A}}{\cos\gamma},$$

ou bien, en mettant à la place de $\sqrt{A}$ sa valeur précédemment trouvée $r^2\sin^2\psi\frac{d\varphi}{dt}$,

$$\sin^2\psi\, d\varphi = \cos\gamma\, d\theta.$$

Substituant maintenant pour $d\varphi$ sa valeur tirée de l'équation (12), et indiquant l'intégration, on aura

$$\theta.\cos\gamma = \int_\psi^{\frac{\varpi}{2}} \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-A - B\sin^2\psi}};$$

puis, si l'on met dans l'équation (10), $\theta.\cos\gamma$ à la place de l'intégrale

$$\int \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-A - B\sin^2\psi}},$$

qu'on peut supposer prise entre les limites ψ et $\frac{\varpi}{2}$, il viendra

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B}} + \frac{\theta}{\sqrt{ga(1-e^2)}} = 2B',$$

ou bien

$$\int \frac{\sqrt{ga(1-e^2)}\, dr}{r\sqrt{2Cr^2 + 2gr + B}} = 2B'\sqrt{ga(1-e^2)} - \theta.$$

Or cette équation devient identique à l'équation polaire de l'ellipse,

en remettant pour B et C leurs valeurs. On voit ainsi qu'on peut supposer que $2B'\sqrt{ga(1-e^2)}$ est la longitude du périhélie, et, par conséquent, qu'au facteur $2\sqrt{g}$ près, B' est la longitude du périhélie divisée par la racine carrée du demi-paramètre.

Il nous reste à trouver la signification de la constante A'. Or cette constante nous est donnée immédiatement par l'équation (11), mise sous la forme

$$\varphi - 2A'\sqrt{A} = \int_{\psi}^{\frac{\varpi}{2}} \frac{\sqrt{A}\, d\psi}{\sqrt{-A - B\sin^2\psi}}:$$

car il suffit de supposer que la constante $2A'\sqrt{A}$ est la valeur de φ pour $\psi = \frac{\varpi}{2}$, c'est-à-dire la longitude du nœud. Ainsi, au facteur près $2\sqrt{g}$, la constante A' est égale à la longitude du nœud divisée par le produit de la racine carrée du demi-paramètre et du cosinus de l'inclinaison.

Remarquons, en passant, que l'équation (12), après qu'on y a remplacé A et B par leurs valeurs précédemment trouvées, peut s'écrire

$$d\varphi = \frac{d\psi}{\sin\psi\sqrt{\tang^2\gamma - \cot^2\psi}};$$

et, en intégrant, on a

$$\cot\psi = \tang\gamma\sin(\varphi - h),$$

h étant la longitude du nœud.

L'équation précédente peut être considérée comme l'équation d'un plan qui fait un angle γ avec le plan des xy, et dont la trace sur ce plan fait avec l'axe des x un angle h. Nous voyons maintenant que la courbe est plane, comme nous l'avions supposé dans les calculs précédents, et en même temps nous avons une vérification de la détermination de nos constantes A et B.

Concluons maintenant comme résultat définitif de notre travail, que les éléments dont nous pouvons déterminer les variations par des équations de la forme des équations (3), sont :

L'axe inverse, le temps du passage par le périhélie, le demi-paramètre, le demi-paramètre multiplié par le carré du cosinus de l'inclinaison, la longitude du périhélie divisée par la racine carrée du demi-paramètre ; et, enfin, la longitude du nœud divisée par le produit de la racine carrée du demi-paramètre et du cosinus de l'inclinaison.

M. Jacobi trouve des éléments un peu différents des nôtres. Ce sont les suivants :

L'axe inverse, le temps du passage par le périhélie, la racine carrée du demi-paramètre, la racine carrée du demi-paramètre multipliée par le cosinus de l'inclinaison, la longitude du périhélie et celle du nœud. Mais on peut, sans difficulté, déduire l'un de l'autre les deux systèmes d'équations correspondant aux deux systèmes d'éléments.

SUR LA RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES AU PLUS PETIT NOMBRE DE TERMES;

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin*, 9 novembre 1848.)

Il y a une infinité de manières de transformer les formes quadratiques à n variables par des substitutions linéaires au déterminant 1 en d'autres équivalentes. On peut se servir des coefficients de la substitution pour réduire la forme. En général, dans la réduction des fonctions, on se propose de réduire au plus petit nombre les arguments dont la fonction dépend. Mais pour les formes quadratiques, le problème est autre: on s'est proposé de renfermer dans des limites les coefficients de la forme, de sorte que, parmi toutes les formes équivalentes, il n'y en ait qu'une seule *réduite*. Mais, même pour les formes quadratiques, le premier point de vue n'est pas sans importance, c'est-à-dire la question de déterminer le plus petit nombre des termes auxquels une forme quadratique à n variables soit réductible.

Pour les formes binaires, il est évident qu'il n'y a pas de telles réductions, ou, ce qui revient au même, on ne peut faire disparaître un des trois termes de la forme. Quant aux formes quadratiques à plus de deux variables, elles sont toujours réductibles à un moindre nombre des termes. Le nombre des termes croît avec le nombre des variables, mais pour les formes quadratiques complètes comme les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10,..., et pour les formes réduites au plus petit nombre de termes, comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7,...; de sorte que, pour 3, 4, 5,... variables, on peut faire disparaître 1, 3, 5,... coefficients. On peut remplacer une forme quadratique à n

variables par une autre équivalente qui ne contient, outre les carrés des variables, que les produits de chaque variable par la variable immédiatement suivante. Donc, sans perdre de généralité, on pourra prendre pour une forme quadratique quelconque à n variables une expression telle que celle-ci :

$$a\omega^2 + 2a_1\omega\omega_1 + a_2\omega_1^2 + 2a_3\omega_1\omega_2 + a_4\omega_2^2 + 2a_5\omega_2\omega_3 + a_6\omega_3^2 + \ldots \\ + 2a_{2n-1}\omega_{n-1}\omega_n + a_{2n}\omega_n^2.$$

Le moyen d'effectuer une telle réduction consiste en ce qu'on substitue à une expression linéaire donnée

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_i x_i,$$

un seul terme $f.u$, f étant le diviseur commun de α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_i.

J'appellerai *systèmes équivalents* deux systèmes de quantités qui dépendent l'un de l'autre, de manière qu'en mettant des nombres entiers pour les quantités de l'un des systèmes, les quantités de l'autre deviennent également des nombres entiers. Pour que deux systèmes soient équivalents, il faut que les quantités de l'un soient des fonctions linéaires de l'autre, et que les coefficients de ces fonctions soient des nombres entiers au déterminant 1. Étant donnée une expression linéaire de i variables x_1, $x_2, \ldots$, x_i,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_i x_i,$$

dont les coefficients α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_i soient des nombres entiers, on pourra remplacer les quantités x_1, $x_2, \ldots$, x_i par un système de quantités équivalentes, telles que, u en étant une, et f étant le plus grand diviseur commun de α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_i, on ait l'équation

$$f.u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_i x_i.$$

J'expliquerai dans une autre occasion la méthode pour trouver les substitutions les plus simples et aux plus petits coefficients.

Soit V une forme quadratique à n variables x_1, $x_2, \ldots$, x_n, où l'ensemble des termes affectés de x_n soit

$$x_n(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}) + a_n x_n^2.$$

Substituons aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ un système équivalent x'_1, $x'_2, \ldots, x'_{n-1}$, de sorte qu'on ait

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} = f_1 x'_{n-1},$$

f_1 étant le plus grand diviseur commun de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$; alors il viendra

$$V = a_n x_n^2 + f_1 x_n x'_{n-1} + V_1,$$

V_1 étant une forme quadratique des variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}$. Soient, dans V_1, les termes multipliés par x'_{n-1},

$$x'_{n-1}(a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + \ldots + a'_{n-2} x'_{n-2}) + a'_{n-1} x'^2_{n-1}.$$

En introduisant pour $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-2}$ un système équivalent x''_1, $x''_2, \ldots, x''_{n-2}$, tel que

$$a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + \ldots + a'_{n-2} x'_{n-2} = f_2 x''_{n-2},$$

f_2 étant le plus grand diviseur commun de $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-2}$, on obtiendra

$$V = a_n x_n^2 + f_1 x_n x'_{n-1} + a'_{n-1} x'^2_{n-1} + f_2 x'_{n-1} x''_{n-2} + V_2,$$

V_2 étant une forme quadratique des $(n-2)$ quantités $x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n-2}$.

En continuant, on parviendra à la transformation

$$\begin{aligned} V_n = a_n x_n^2 &+ a'_{n-1} x'^2_{n-1} + a''_{n-2} x''^2_{n-2} + \ldots + a_1^{(n-1)} x_1^{(n-1)^2} \\ &+ f_1 x_n x'_{n-1} + f_2 x'_{n-1} x''_{n-2} + f_3 x''_{n-2} x'''_{n-3} + \ldots + f_{n-1} x_2^{(n-2)} x_1^{(n-1)}, \end{aligned}$$

ce qui est une expression réduite du genre mentionné plus haut.

J'ajoute encore la remarque que, les coefficients des produits des variables dans la forme primitive étant des nombres pairs, il en sera de même des nombres $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$.

SUR LES

NORMALES INFINIMENT VOISINES D'UNE SURFACE COURBE;

PAR M. JOACHIMSTHAL (DE BERLIN).

I.

En désignant par f et g deux points infiniment proches, mais d'ailleurs quelconques d'une surface, par F et G les normales à la surface en ces points, je vais déterminer :

1°. La plus courte distance entre F et G;

2°. Le point o où cette distance rencontre la normale F;

3°. La distance of.

Je nommerai o le pôle et of la distance polaire de l'élément fg; pour un élément tangent à une ligne de courbure, le pôle et la distance polaire deviendront le centre et le rayon de courbure de la section principale qui passe par fg et la normale F.

Soient d'abord f et g deux points dans deux plans quelconques A et B, et F et G les perpendiculaires sur ces plans en ces points; la plus courte distance λ entre ces droites sera donnée par la formule

$$\lambda = \overline{fg}.\cos(\lambda, \overline{fg}).$$

Mais la plus courte distance λ étant parallèle aux plans A et B sera de même parallèle à leur intersection, et l'angle $(\lambda, \overline{fg})$ sera égal à l'angle entre cette droite d'intersection et $\overline{fg}$.

Soient A et B deux plans tangents à une surface en deux points infiniment proches f et g; l'intersection de A et B sera la tangente conjuguée à l'élément fg, et la plus courte distance λ entre deux normales infiniment voisines l'une de l'autre s'exprimera par

$$\lambda = \cos\omega\, ds, \tag{1}$$

ω étant l'angle entre l'élément ds déterminé par les pieds des normales et sa direction conjuguée.

D'après les beaux théorèmes de M. Dupin, les directions des tangentes conjuguées au point f d'une surface courbe coïncident avec les directions des diamètres conjugués de la conique

$$\frac{\xi^2}{P} + \frac{\eta^2}{Q} \mp 1,$$

P et Q étant les rayons de courbure de la surface en f, et ayant pris les tangentes aux lignes de courbure pour les axes de ξ et η.

Donc, l'angle de l'élément ds et de l'une des lignes de courbure étant égal à a, on aura, par les formules connues sur les diamètres conjugués,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\omega &= \pm \cos a \sin a \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) \frac{1}{\left(\frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}},\\ \sin\omega &= \left(\frac{\cos^2 a}{P} + \frac{\sin^2 a}{Q}\right) \frac{1}{\left(\frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}\right.$$

d'où vient

$$(3)\quad \lambda = \pm \cos a \sin a \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) \frac{ds}{\left(\frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour les lignes de courbure, l'angle a est ou égal à zéro, ou égal à un angle droit; donc on aura $\lambda = 0$, c'est-à-dire les normales aux extrémités d'un élément d'une ligne de courbure se rencontrent.

Pour obtenir les valeurs maxima de λ, il faut différentier λ par rapport à a, et on obtient

$$0 = (\cos^2 a - \sin^2 a)\left(\frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2}\right) - \cos a^2 \sin a^2 \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{P^2}\right),$$

ou, en réduisant,

$$0 = \frac{\cos^4 a}{P^2} - \frac{\sin^4 a}{Q^2},$$

ce qui revient à la formule

$$(4)\quad \operatorname{tang}^4 a = \frac{Q^2}{P^2}.$$

Si on suppose les rayons P et Q de même signe, on en conclut

$$(5)\qquad \operatorname{tang}^2 a = \frac{Q}{P},$$

donc

$$(6)\qquad \sin^2 a = \frac{Q}{P+Q},\quad \cos^2 a = \frac{P}{P+Q},\quad \frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2} = \frac{1}{PQ}.$$

Soit ρ le rayon de courbure de la section normale faite suivant l'élément ds; on a, par le théorème d'Euler,

$$(7)\qquad \rho = \frac{1}{\frac{\cos^2 a}{P} + \frac{\sin^2 a}{Q}}.$$

Mais en substituant les valeurs de $\cos^2 a$ et de $\sin^2 a$ que nous venons de trouver, les formules (3) et (7) deviendront

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda = \pm \frac{Q-P}{Q+P}\, ds, \\ \rho = \frac{1}{2}(P+Q). \end{array}\right.$$

Donc, la valeur maximum de λ correspond à l'élément d'une section normale dont le rayon de courbure est le moyen entre les rayons des principales.

Si les rayons P et Q sont de signe contraire, on déduit de l'équation (4),

$$\operatorname{tang}^2 a = -\frac{Q}{P}$$

et

$$\cos^2 a = \frac{P}{P-Q},\quad \sin^2 a = -\frac{Q}{P-Q}.$$

Par la substitution de ces valeurs, on trouve

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda = ds, \\ \rho = \text{à l'infini}. \end{array}\right.$$

Donc, pour les surfaces qui ont les courbures principales dirigées en sens contraire, le maximum de λ correspond aux sections normales dont la courbure s'évanouit, et, pour ce cas, la plus courte distance

coïncide avec l'élément ds. En résumant ce que nous venons de démontrer, nous aurons le théorème suivant :

Théorème. Étant décrite sur une surface autour d'un point f et avec le rayon infiniment petit B, la circonférence de cercle $gg'g''$..., si en tous ces points on mène les normales à la surface F, G, G', G'',... et les plus courtes distances entre F et G, G', G'',..., que je désignerai par l, l', l'',....

1°. Une quelconque des distances l sera égale au rayon B multiplié par le cosinus de l'angle entre fg (le rayon) et la direction conjuguée;

2°. Les rayons principaux de la surface étant de même signe P et Q, les valeurs maxima des distances l correspondront aux directions suivant lesquelles le rayon de la section normale est égal à $\frac{1}{2}(P+Q)$, et la valeur maxima sera égale à $\pm B\dfrac{Q-P}{Q+P}$;

3°. Les rayons principaux étant de signe contraire, les valeurs maxima de l correspondront aux directions suivant lesquelles le rayon de la section normale est infini, et la plus courte distance coïncidera avec le rayon.

Je vais maintenant déterminer le pôle d'un élément ds.

II.

Soient

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{X-l}{a}=\frac{Y-m}{b}=\frac{Z-n}{c},\\ &\frac{X-l-l'}{a+a'}=\frac{Y-m-m'}{b+b'}=\frac{Z-n-n'}{c+c'},\end{aligned}\right.$$

les équations de deux droites quelconques; l'équation d'un plan parallèle à ces droites sera

$$(11)\qquad (bc'-cb')X+(ca'-ac')Y+(ab'-ba')Z=C,$$

et l'équation du plan perpendiculaire au plan (11) et qui passe par la seconde droite (10), sera

$$(12)\quad L(X-l-l')+M(Y-m-m')+N(Z-n-n')=0,$$

les rapports L, M, N étant donnés par les équations

$$(13)\quad \begin{cases} L(a+a')+M(b+b')+N(c+c')=0, \\ L(bc'-cb')+M(ca'-ac')+N(ab'-ba')=0. \end{cases}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} fL &= a\,(a'^2+b'^2+c'^2+aa'+bb'+cc') \\ &\quad - a'(a^2+b^2+c^2+aa'+bb'+cc'), \\ fM &= b\,(a'^2+b'^2+c'^2+aa'+bb'+cc') \\ &\quad - b'(a^2+b^2+c^2+aa'+bb'+cc'), \\ fN &= c\,(a'^2+b'^2+c'^2+aa'+bb'+cc') \\ &\quad - c'(a^2+b^2+c^2+aa'+bb'+cc'), \end{aligned}$$

f étant un facteur indéterminé.

Le plan (12) et la plus courte distance des droites (10) couperont la première de ces droites au même point, dont je désignerai les coordonnées par X, Y, Z. On aura évidemment

$$(14)\quad \begin{cases} X=l+a\sigma, \\ Y=m+b\sigma, \\ Z=n+c\sigma, \end{cases} \quad \sigma=(aL+bM+cN)=l'L+m'M+n'N,$$

ou bien, en faisant

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=h, \\ aa'+bb'+cc'&=i, \\ a'^2+b'^2+c'^2&=k, \end{aligned}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \sigma(hk-i^2)=(al'+bm'+cn')(i+k) \\ \qquad\qquad -(a'l'+b'm'+c'n')(h+i). \end{cases}$$

Supposons que les deux droites soient deux normales voisines de la surface représentées par l'équation différentielle

$$(16)\qquad dz=p\,dx+q\,dy;$$

il faut mettre

$$\begin{array}{llllll} a=p, & b=q, & c=-1, & l=x, & m=y, & n=z; \\ a'=dp, & b'=dq, & c'=0, & l'=dx, & m'=dy, & n'=dz. \end{array}$$

Par ces valeurs, on obtient

$$\sigma = -\frac{(dp\,dx + dq\,dy)(1+p^2+q^2)}{dq^2+dp^2+(p\,dq-q\,dp)^2} = -\frac{(dp\,dx+dq\,dy)(1+p^2+q^2)}{(1+p^2)dq^2-2pq\,dp\,dq+(1+q^2)dp^2},$$

et, en mettant

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

on aura

$$(17)\qquad \begin{cases} X = x + p\sigma, \\ Y = y + q\sigma, \\ Z = z - \sigma, \\ \sigma = -(1+p^2+q^2)\dfrac{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}{(1+p^2)dq^2-2pq\,dp\,dq+(1+q^2)dp^2}. \end{cases}$$

Telles sont les coordonnées du pôle d'un élément de la surface.

III.

Pour déterminer la distance polaire Δ ou la distance du pôle (X, Y, Z) au point de la surface (x, y, z), je ferai coïncider les axes des coordonnées z, x, y respectivement avec les normales et les deux tangentes des sections principales; on a, par cette supposition,

$$x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad p = 0,\quad q = 0,\quad s = 0,$$

et

$$Z = \Delta = -\sigma,$$

ou bien

$$\Delta = \frac{r\,dx^2+t\,dy^2}{t^2dy^2+r^2dx^2} = \frac{r+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{r^2+t^2\left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$

Soient P et Q les rayons principaux de la surface, et a l'angle entre l'élément de la surface et l'axe des x; on aura

$$r = \frac{1}{P},\quad t = \frac{1}{Q},\quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} a,$$

par conséquent

$$(18)\qquad \Delta = \frac{\dfrac{\cos^2 a}{P}+\dfrac{\sin^2 a}{Q}}{\dfrac{\cos^2 a}{P^2}+\dfrac{\sin^2 a}{Q^2}}.$$

En gardant les mêmes désignations que ci-dessus, on a, par les formules (2) et (7),

$$\Delta = \rho \sin^2 \omega. \tag{19}$$

Soient Δ_1, ρ_1 les quantités analogues pour un élément de la surface perpendiculaire au premier, et Δ', ρ' pour l'élément conjugué au premier; on aura

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2}},$$

donc

$$\frac{1}{\Delta\rho} = \frac{\cos^2 a}{P^2} + \frac{\sin^2 a}{Q^2};$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\Delta\rho} + \frac{1}{\Delta_1\rho_1} = \frac{1}{P^2} + \frac{1}{Q^2}. \tag{20}$$

Pour l'élément conjugué, on aura

$$\Delta' = \rho' \sin^2 \omega,$$

d'où vient

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\rho}{\rho'}, \tag{21}$$

c'est-à-dire que, pour deux éléments conjugués, les distances polaires sont entre elles comme les rayons des sections normales.

Comme ρ et ρ' sont égaux aux carrés des demi-diamètres conjugués de la conique

$$\frac{\xi^2}{P} + \frac{\eta^2}{Q} = 1, \tag{21 bis}$$

on aura

$$\left\{ \begin{aligned} &\rho + \rho' = P + Q, \\ &\rho\rho' \sin^2 \omega = PQ, \end{aligned} \right. \tag{22}$$

ou, en ayant égard à l'équation (19),

$$\Delta = \frac{PQ}{P + Q - \rho}, \tag{23}$$

relation très-simple entre la distance polaire et le rayon de la section normale qui passe par le même élément.

On a, pour deux directions conjuguées,

$$\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{\rho \sin^2 \omega} + \frac{1}{\rho' \sin^2 \omega},$$

et, en réduisant au moyen des formules (22),

$$(24) \qquad \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q}.$$

Donc, pour deux éléments conjugués la somme des valeurs réciproques des distances polaires reste constante.

Soient f un point de la surface, f' le quatrième point harmonique par rapport à f et aux deux centres de courbure; on aura

$$(25) \qquad \frac{2}{ff'} = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q},$$

d'où vient

$$(26) \qquad \frac{2}{ff'} = \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta'}:$$

ou bien :

Les points f et f' et les pôles de deux éléments conjugués sont quatre points harmoniques.

Il suit de là :

Les pôles de six éléments conjugués deux à deux sont six points en involution.

Soit d le demi-diamètre de la conique (21 *bis*) dont le carré est égal au rayon de courbure ρ; on aura

$$\Delta = d^2 \sin^2 \omega.$$

Mais, ω étant l'angle entre le diamètre $2d$ et la tangente à son extrémité, $d \sin \omega$ sera égal à la perpendiculaire abaissée du centre de la conique sur la tangente.

Donc :

La distance polaire est égale au carré de la perpendiculaire abaissée du centre de la conique (21 *bis*) sur la tangente à l'extrémité du demi-diamètre $\sqrt{\rho}$.

SUR LA

COURBE DONT LES DEUX COURBURES SONT CONSTANTES;

PAR M. J. BERTRAND.

M. Puiseux a démontré d'une manière très-élégante que l'hélice est la seule courbe dont les deux courbures soient constantes; mais comme sa démonstration, purement analytique, est un peu longue, ayant eu occasion d'enseigner ce théorème, j'ai trouvé un avantage de simplicité à y substituer le raisonnement suivant.

Si les deux courbures d'une courbe sont constantes, les parallèles, menées à ses tangentes par un point de l'espace, formeront un cône dans lequel l'angle de deux plans tangents infiniment voisins sera proportionnel à celui de leurs génératrices de contact; car le premier de ces deux angles est celui de deux plans osculateurs infiniment voisins de la courbe cherchée, et le second est l'angle des deux tangentes correspondantes. Il résulte de cette remarque que, si l'on décrit du sommet du cône comme centre, une sphère de rayon 1, la courbure de la surface conique sera la même en tous les points de la courbe d'intersection, qui est, comme on sait, une ligne de courbure; l'élément de cette ligne mesure, en effet, l'angle des deux génératrices, et l'angle des normales menées à ses extrémités n'est autre chose que celui des plans tangents correspondants.

Si, par les points de cette ligne de courbure, on mène des normales à la surface conique, et qu'on prenne sur chacune d'elles une longueur égale à ce rayon de courbure constant, on formera une courbe qui étant le lieu des intersections successives de ces normales leur sera tangente à toutes; d'un autre côté, cette courbe, étant obtenue en portant une longueur constante sur des normales à la surface conique, est située sur une surface parallèle et doit couper

toutes les normales à angle droit; devant ainsi être à la fois tangente et normale aux mêmes lignes, elle doit se réduire à un point. Si, de ce point comme centre, avec un rayon égal au rayon de courbure constant, on décrit une sphère, cette sphère sera inscrite dans le cône qui, par conséquent, est de révolution. Ainsi donc, toutes les tangentes de la courbe cherchée font un angle constant avec une droite fixe, et, par conséquent, cette courbe peut être considérée comme une hélice tracée sur un cylindre parallèle à cette droite.

Cherchons maintenant ce que doit être ce cylindre. Pour que les deux courbures de l'hélice soient constantes, il faut que deux arcs infiniment petits égaux aient le même angle de contingence; et comme les tangentes sont également inclinées sur les génératrices du cylindre, il faut évidemment pour cela que les deux plans tangents correspondants fassent le même angle: si l'on remarque qu'à des arcs égaux d'hélice correspondent des arcs égaux de section droite, il en résulte que les plans tangents au cylindre menés à l'extrémité de deux arcs infiniment petits égaux de la section droite doivent faire le même angle, et que, par conséquent, la courbure de cette section droite est constante, en sorte que c'est un cercle.

Il résulte de la démonstration précédente que *l'hélice tracée sur un cylindre quelconque est la seule courbe dont les deux courbures aient un rapport constant.*

FIN DU TOME TREIZIÈME.